

国际信息工程先进技术译丛

WILEY

数字信号处理与滤波器设计

Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design

[美] B.A.谢诺依（B. A. Shenoi） 著

白文乐 王月海 胡越 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国际信息工程先进技术译丛

数字信号处理与滤波器设计

[美] B. A. 谢诺依（B. A. Shenoi） 著
白文乐 王月海 胡 越 译



机 械 工 业 出 版 社

北京市版权局著作权合同登记图字：01－2014－3075 号。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理与滤波器设计/（美）B. A. 谢诺依（B. A. Shenoi）著；白文乐，王月海，胡越译．—北京：机械工业出版社，2018. 3
（国际信息工程先进技术译丛）
书名原文：Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design
ISBN 978-7-111-58904-4

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①B…　②白…　③王…　④胡…　Ⅲ. ①数字信号处理　②数字滤波器－设计　Ⅳ. ①TN911. 72　②TN713

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 003480 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：江婧婧　责任编辑：江婧婧
责任校对：刘　岚　封面设计：马精明
责任印制：张　博

三河市国英印务有限公司印刷

2018 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm ·23. 25 印张·440 千字
0 001—3 000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-58904-4
定价：139.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010－88361066	机 工 官 网：www. cmpbook. com
读者购书热线：010－68326294	机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
010－88379203	金 书 网：www. golden－book. com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www. cmpedu. com

本书介绍了数字信号处理与滤波器设计的基础知识，涵盖了信号的分类、时域分析、频域分析、z 变换、无限冲激响应滤波器、有限冲激响应滤波器、滤波器的实现、滤波器的量化分析、使用 DSP 芯片设计硬件、MATLAB 基础等内容。本书一个吸引人的特点是每个章节的习题都可以使用章节知识内容解决，读者可以通过解答习题充分地理解课程覆盖的知识，同时给读者提供了大量的动手实践参考，有些问题是先理论后例子求解，有些是先解习题后叙述理论，对读者的双向理解会很有帮助。

本书适合通信、电子、计算机等专业的本科生和研究生作为相关课程的参考书和补充教材，也可供相关专业的教师、工程技术人员和其他从业人员参考使用。

译 者 序

信息技术是当今最具活力的技术之一，相关人才的市场需求量一直迅猛增长。随着大规模集成电路以及数字计算机的飞速发展，用数字方法来处理信号，即数字信号处理技术应用面越来越广，很大程度上直接影响相关技术产品的市场竞争力。数字信号处理是理论性和工程性都很强的学科，学生对数字信号处理专业知识的理解普遍感到困难，其主要原因是理论教学多，理论习题、实验仿真及应用开发三者结合的比较少，目前大部分数字信号处理相关的教材基本可分为：重理论轻习题；轻理论重习题；重应用轻理论三大类，学生往往需要借阅多本教材综合学习消化吸收。本书尝试突出基本概念，以理论公式、数值习题、实验仿真及应用开发相结合的形式呈献给读者，以能高效学习掌握数字信号处理应用综合基础。本书的第 1 ~7 章涵盖了离散时间信号、离散时间系统、频域分析、有限与无限滤波器理论与设计、实现结构及量化误差分析等数字信号处理的核心基础，第 8 章是数字信号处理的硬件实现，是初学者专业兴趣发展的重要导引，第 9 章是 MATLAB 信号处理工具箱初级使用。本书一个最大的特点是突出基本概念，在每个章节使用大量数值习题及使用 MATLAB 的习题解答，给读者提供了大量的动手实践参考，有些问题是先理论后例子求解，有些问题是先解习题后叙述理论，对读者的双向理解会很有帮助。本书另一个吸引人的特点是每个章节的习题都可以使用本章节知识内容解决，读者可以通过解答习题充分地理解课程覆盖的知识点。本书的出版得到国家自然科学基金项目（61371143）、北京高校电子信息类专业群建设项目（PXM2016_ 014212_ 000008）的资助，在此表示感谢。

本书概念、公式、习题计算与仿真相结合，深入浅出，适合初级水平学生与工程开发人员使用，同时每个章节增加了适合高水平人员的主题及深入分析的讲解，有利于巩固快速提升。

全书共 9 章，由北方工业大学白文乐、王月海、李争平副教授，林欣讲师以及研究生胡越进行翻译和校对。其中，林欣负责第 1 章、第 2 章、王月海负责第 3 章、白文乐负责第 4 章 ~第 8 章、李争平负责第 9 章。胡越、梁东升两位研究生做了初期排版，张咏梅教授、白文乐副教授对翻译整体做了校对，另外对原著中部分公式做了校正。

由于译者水平有限，译文不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。

白文乐

2017 年 10 月

原书前言

本前言为教师以及初学者所作，原因如下：我一直教授本科和研究生二年级的数字信号处理课程长达25年，包括其应用和数字滤波器设计课程。在最近的几年来，我不止一次从本科学生中听到有人抱怨，在本课程规定的章节中没有足够多的能够理解透彻的数学推导。但是，有些数字信号处理方面的教材比前几年出版的图书有更多的数学推导。然而，这些书籍是为已经入门和研究生层面的学生撰写的，因此初学者会发现这些书中有太多的数学理论，同时他们也对章节末尾中更复杂的问题感到头疼。我一直没有找到一本适合初学者的数字信号处理教材，所以我便以学生为导向，基于我多年的教学经验，写了一本关于数字信号处理及滤波器设计的书以供大家参考。

网络分析是一本由我的博士论文导师 M. E. Van Valkenburg 创作的本科教科书（于1964年由 Prentice – Hall 出版社出版），这本书已经成为一本举世闻名的经典著作，不仅是因为它在拥有严谨和美好的数学理论的网络分析方面上囊括了丰富的专题，还因为当学生学习网络分析时，它能够帮助学生以最简单的形式理解基本概念。在我写这本书的同时，该书始终深深影响着我。但是我也不得不时常提醒自己时代在发生变化；网络分析这门课程与数字信号处理的问题也是不一样的。本书不包含上述高级研究生教科书中的许多课题，但这本书的主要特点之一是在每一个章节中，它运用了大量的数学模型以及来自 MATLAB® （MATLAB是 MathWork 公司的注册商标）的函数和信号处理工作箱，来解释基本概念。在讲解理论后，这些问题作为例子进行讲解，或是在书中，先解决问题，随后讲解理论。无论哪种方式，方法的重点在于学生们应该了解基本思想，将工作中的问题作为实现这一目标的手段。在某些情况下，说明的方式并非十分正式。学生将会发现说明会从“注解……”“回忆……”或者“指出……”等开始；它们意味着强调重要的概念和那些句子所表达的结论。许多重要的结果在文中被提及不止一次，或者被总结为了强调它们的意义。

本书的另一特点是在章节末尾给出的所有难题都是能够通过文中知识来解决的。因此当他们成功解决难题时，那些本科生将会因他们理解了涉及课程的原理而感到自信。鉴于此，作者主张要用以学生为中心的方法编写这本书。但是，本科学生应该明白，理解解决问题的能力是重要的，并且理解问题之后的理论是更加重要的。

以下段落是写给那些教授数字信号处理课程的大学讲师的。前7章明确涉及

了以下专题：①入门基础，②时域分析和 z 变换，③频域分析，④无限冲激响应滤波器，⑤有限冲激响应滤波器，⑥滤波器的实现，⑦滤波器的量化分析；第 8 章讨论了硬件设计；第 9 章介绍了 MATLAB 软件。本书的重点是数字信号处理的基本概念。

大多数的研究生教科书用大量的细节解释有限字长原理，但研究生们在分析关于有限字长下的滤波器频率响应，或者设计在给定字长和量化形式下满足一系列的频率响应要求的滤波器时感到无助。在第 7 章，我们讨论使用 MATLAB 工具，即为人们所熟知的“FDA 工具”，用来彻底地研究有限字长和不同量化的幅值。这是本书的另一个引人注意的特征，并且这是其他同类书籍所不具备的特征。

当研究生们已经学习了数字信号处理这门课程，或加入设计用于商业用途的 DSP 芯片的数字信号系统时，他们几乎没有任何关于他们所学内容的指导。第 8 章中的额外内容，那将会是引导学生们学习来实现他们专业发展成功的重要内容。这是用来指引他们未来正确方向、简洁但又重要的材料 。尽管有很多关于使用 DSP 芯片的数字系统的硬件实现的书籍，但在 DSP 上编写的指导书几乎不提供任何关于这个问题的指导。仅有少数学校提供关于使用 DSP 芯片构成的数字系统的设计与测试的实验课程。在其标题中包含“数字信号处理”的任何其他教科书中，也没有发现含有本书第 8 章中的类似内容。然而，第 8 章不仅包含详尽的硬件实现，还可以作为一个让在行业里开始自己生涯的研究生们不得不去学习的入门教材。

第 1 章是致力于描述离散时间信号。它描述了数字信号处理的应用软件和定义，定义了几个描述离散时间信号的方法。一些离散时间信号和服从数字信号处理特性的例子都紧随着它们的特性。特别指出，本书给出了复指数的内容和数字滤波器的设计。本章还讨论了数字信号处理相较于连续时域信号处理的优点。

第 2 章着重于离散时域系统。本章详细讨论了对离散时间信号进行激励的几种建模方法和 4 种获取离散时间系统响应的方法。用来描述时域下的总体响应有这 4 种模型：①循环法则，②卷积和，③古典方法，④z 变换原理。z 变换理论的用途是将从细节方面和数学举例以及 MATLAB 功能的例证等方面详细地推导出零状态响应、零输入响应、自然响应和应激响应、暂态和稳定响应。在这一章里我们将学习离散时间系统特性、阶跃脉冲响应和变换函数、稳态理论和 Jury－Marden 测试。本书相较于其他教科书，详细介绍了离散时间系统的时域分析。

第 3 章侧重于频域分析。采样定理的推导之后是离散时间傅里叶变换（DT-FT）的推导及其在滤波器设计中的重要性。离散傅里叶变换的一些特性和得到的离散傅里叶变换的典型离散信号的例子被包括在许多解释它们的示例中。本章还增加了大量由 MATLAB 函数解决的问题的示例。本章致力于频域分析，其在

许多方面上是不同于其他教科书的。

无线冲激响应滤波器的设计是第4章的主题。本章讨论了模拟滤波器功能近似理论，近似特定频率响应的模拟滤波器设计，冲激变换的使用以及双线性变换。本章将讨论数学实例，并运用MATLAB函数来设计滤波器，为学生提供实践经验。

第5章关注的是有限冲激响应滤波器的理论和设计。FIR滤波器的内容包括线性相位，和通过定义的窗口函数的傅里叶序列来设计此滤波器。本章也讨论等波纹FIR滤波器的设计和使用Remez交换运算法则。本章包含许多数学模型和MATLAB函数用以说明设计过程。

在第4章和第5章学习设计FIR滤波器和IIR滤波器模型后，学生有必要尽可能地掌握更多的滤波器结构，这样能够让他们研究有限字长对这些结构滤波器频率响应的影响，并选择最好的结构。

在第6章，描述用于实现FIR滤波器和IIR滤波器几种结构的方案。FIR滤波器的结构可分为直接型、叠加型和多相位型以及晶格结构及其转置形式。IIR滤波器的结构包括直接形式、级联、并联结构、网格-耦合全通道结构，以及作为特殊情况的具有自回归（AR）、移动平均（MA）和全通道结构的格子梯形结构。此外，本章包含了大量的数学模型，并使用大量MATLAB和Signal Processing Toolbox中的函数，这方面本书相比其他教科书在内容上介绍得更加详细。

在第7章讨论了有限字长对第6章中不同结构滤波器频率响应的影响，本书的研究方法与其他教科书有着明显差异。本章没有对有限字长效应进行理论分析，因为它超出了初级课程的范围。作者选择使用一种称为“FDA工具”的MATLAB工具，用于研究有限字长对于不同结构、不同传输函数和用于量化滤波器系数值不同格式的影响。除了多种结构的替代选择、传递函数等之外，其他选择，如截断、舍入、饱和度和缩放以找到最佳滤波器结构，使其成为比理论结果更强大的工具。学生会发现使用这个工具的经验比实际硬件实现中的理论更有用。

第1~7章涵盖了数字信号处理的核心课题。第8章关于数字滤波器的硬件实现，简要描述了Simulink®上的数字滤波器的仿真，以及使用Real-TimeWorkshop®从Simulink生成C代码（Simulink和Real-Time Workshop是MathWorks公司的注册商标），从C代码生成汇编语言代码，链接汇编语言代码的单独部分，以生成可在得州仪器公司的Code Composer Studio下执行的代码。第8章还包括有关DSP开发入门套件、模拟器和仿真器板的信息。第9章，本书的最后一章，介绍了MATLAB和信号处理工具箱。

作者建议，前3章讨论数字信号处理的基础知识，可以在第一季度的课程初级阶段进行教学。学习本课程的先决条件是线性、连续时间信号和系统的初级课

程，特别涉及拉普拉斯变换、傅里叶变换和傅里叶级数。第4~7章讨论数字滤波器的设计和实现，可以根据专业课程，在高年级作为选修课程进行教学。教师必须酌情选择课堂上讨论的问题，指出这些问题的真正目的是帮助学生了解理论。有些章节对于初级课程过于难以理解，也会占用过多的课堂时间。这些章节的实例或是通过 Remez 交换算法最小化的目标函数导出，或是用于导出格子梯形实现的公式以及快速傅里叶变换算法的推导。根据我的经验，学生只对使用实现这些算法的 MATLAB 函数感兴趣，因此我删除了最后两个主题的理论阐述，以及 Remez 交换算法中的优化技术的描述。然而，我在书中涵盖了许多使用 MATLAB 函数的例子来解释这些问题。

每章末问题的答案可通过如下网站获得：http：//www. wiley. com/wileycda/wileytitle/productCd－0471464821. html。他们需要单击网页上“下载软件解决手册”的链接以获得问题答案。在本书出版后，作者很快会把问题的答案及其引申问题发布到网上。

正如本前言开头所提到的，本书是根据我自己在教授数字信号处理初级课程方面的经验编写的。在此，我要感谢达拉斯南卫理公会大学的 M. D. Srinath 博士对本书的审阅，及其对改进本书的建设性意见。我也要感谢我的同事赖特州立大学代顿分校的 A. K. 肖博士。我非常感谢我的妻子苏曼，陪伴我一起完成了这本书的编写。没有她的耐心和支持，我甚至不会开始写作，更不用说完成它了。所以我要把这本书献给她，以及我们的家人。

B. A. Shenoi

2005年5月

目　　录

第1章　入门基础

1.1　简介

我们生活在一个信息化的时代。这种技术大多数是基于数字信号处理（DSP）理论及理论的实现，其中理论的实现是通过嵌入在数字信号处理器（DSP）中的设备完成的。当然，数字信号处理理论及其应用离不开其他学科（如计算机科学与工程），和一些先进技术［如超大规模集成电路（VLSI）芯片设计与制造技术］。目前影响我们生活的数字信号处理设备、系统和应用数量非常大，未来几年有望被引入市场的新设备、系统和应用是无穷的。因此，很难预测数字信号处理的未来和信息技术的影响。一些当前应用描述如下。

1.2　DSP应用

数字信号处理应用在多个领域，包括以下几点：

1）电信。无线或移动电话正在迅速取代有线（固定）电话，这两者都连接在一个大型的通信网络上。它们用于语音通信以及数据通信。因此也有计算机连接到进行数据和信息处理的不同网络上。计算机被用于产生、传输和接收大量通过互联网的信息，并且在同一网络将被更广泛地使用，在将来也会被用在语音通信中。这种技术被称为互联网协议语音（VoIP）或互联网电话。除了被归类为多媒体的声音、音乐和其他音频信号，目前我们可以发送和接收有限数量的文本、图形、照片和来自手机的视频图像——因为有限的手机硬件而不是因为已经开发的软件。然而，由于计算机拥有更大的内存和更高的带宽，所以可以更有效地执行相同的功能。目前，市场上已经有开发的无线电话和计算机的无缝集成产品。以上应用的新技术众所周知有CDMA，TDMA，扩频，回波消除，信道编码，自适应均衡，ADPCM编码，和数据加密与解密，其中一些被用在将要介绍的第三代（3G）手机的软件中。

2）语音处理。不论是有线电话（固定电话）或是无线（蜂窝）电话在电信网络的实时语音传输质量都是非常高的。语音识别、语音合成、语声验证、语音增强，文本－语音翻译、语音听写是语音处理的一些其他应用。

3）消费类电子产品。除了我们已经提到的过蜂窝电话或手机，消费电子产

品还有高清电视、数码相机、数字电话、录音电话、传真和调制解调器、音乐合成器、录音和音乐信号的混合产生的 CD 和 DVD。在许多家庭里都有环绕声娱乐系统，包括 CD 和 DVD 播放器、激光打印机、复印机和扫描仪。但是电视机、计算机、电话、CD - DVD 播放器、扫描仪在家里作为独立的系统。然而，电视可以像计算机一样用来阅读电子邮件和访问互联网，计算机可以用来调整和查看电视频道，并记录和播放音乐，以及 CD - DVD 数据分享和拨打 VoIP 电话。这种少系统多应用的发展趋势有望在不久的将来加速。

4）生物医学系统。应用在医院和生物医学的机器的多样性是惊人的。其应用包括 X 光机、MRI、PET 扫描、骨扫描、CT、超声成像、胎儿监测、病人监测，ECG 和 EEC。另一个先进数字信号处理的例子是助听器和心脏起搏器。

5）图像处理。图像增强、图像恢复、图像理解、计算机视觉，雷达和声呐处理、地球物理和地震数据处理、遥感、气象监测是图像处理的一些应用。对从不同角度拍摄的几张照片进行二维重构和从几张连续切片进行三维重构也已有许多应用。

6）军事电子。在军事、国防电子系统中的数字信号处理的应用使用了非常先进的技术。其中一些应用是 GPS 和导航、雷达和声呐图像处理、目标检测和跟踪、导弹制导、安全通信、干扰和对策、侦察机的远程控制及电子战等。

7）航空航天和汽车电子。应用包括飞行器和自动引擎的控制、飞行器飞行性能的监测和控制、导航和通信、汽车的振动分析和防滑控制、飞机的制动控制、悬浮控制、汽车的舒适性等。

8）工业应用。数控、机器人、发动机控制、制造自动化、安全访问、视频会议，这些都是工业应用。

显然，在不同的设备和系统上这些应用有一些重叠。事实上，在所有的应用和系统中，一些基本操作都是常见的，而这些基本操作将在以下章节中进行讨论。上面给出的许多应用实例并不详尽。一些应用在参考文献［1］中有进一步的详细描述。不用说，新应用的数量和对现有应用改善的数量将在不久的将来继续以极快的速度增长。

1.3 离散时间信号

信号将某些物理量的变化定义为有一个或多个自变量的函数，而这个变化包含我们感兴趣的信息。例如，一个连续时间信号周期包含的值中包含基频和谐波，以及各个谐波的振幅和相位角度。信号处理的目的是修改给定信号，使在某种定义好的意义下信息的质量得以改进。例如，在录制音乐的调音台，调整不同的过滤器的频率响应，这样才能提供尽可能高保真质量的整体音频信号（音乐）。注意电话目录或从互联网网站下载的百科全书的内容包含很多有用的信

息，但根据上述定义，其内容不构成信号。当被输入信号激励的时候，正是由于函数和独立变量之间的关系，使得我们能够获得建模信号的方法和找到系统的输出。这也让我们为设计这些系统而寻找方法，这样包含在输入信号中的信息才能改善。

我们把一个连续时间信号定义为一个有连续独立变量的函数。一维连续时间信号$f(t)$被表示为一个时间从$-\infty$到∞连续变化的函数。但它也可能是一个另一些变量（如温度、压力或海拔）的函数；然而，我们将它们表示成连续时间信号，时间是连续的，但是信号在一些时刻可能不连续。信号可能是时间的实值函数或复值函数。我们还可以把一组连续时间信号定义为从所有时间的值到有相应属性的函数值之间的映射集。只要函数在$-\infty$到∞的时间域被定义好之后，它在所有的独立变量t上都是可微的（除了在有限数量的值）。两个连续时间函数的例子，如图1.1所示。

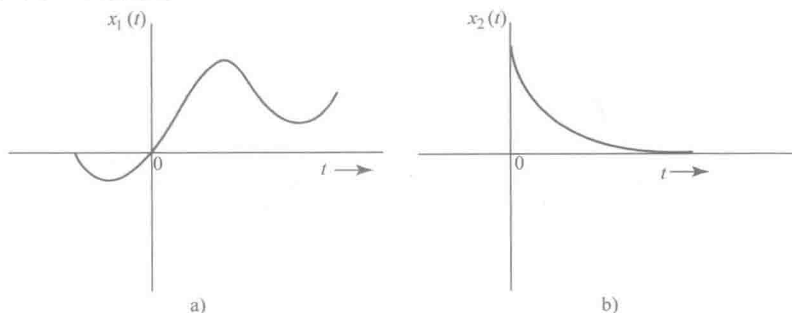


图1.1 两个连续时间信号样本

离散时间信号是只在离散时间的时刻被定义而在其他值的时间没有被定义的函数。虽然离散时间函数可以在$-\infty$到∞上的任意时间间隔被定义，但是我们只考虑一个在相同时间间隔被定义的函数，且在$t=nT$被定义，这里T是一个以秒为单位的固定时间间隔，被称为采样周期，n是一个定义在$-\infty$到∞的整数变量。如果我们把$f(t)$在相同时间间隔T上取样，就生成$f(nT)=f(t)|_{t=nT}$的数列。因为T是固定的，$f(nT)$是只和唯一整数变量n有关的函数，因此可以认为是n的函数或表示为$f(n)$。连续时间函数$f(t)$和离散时间函数$f(n)$绘制在图1.2中。

在本书中，我们将离散时间（DT）函数作为一个DT序列、DT信号或DT级数。所以DT函数是一组从所有整数集合到实函数或复函数值的集合的映射。$f(t)$和$f(n)$的值是连续的，在连续范围内可以取任何值，因此即使有无限数字也会有值，例如，$f(3)=0.4\sqrt{2}$，如图1.2所示。

零阶保持（ZOH）电路用于以周期T对连续信号$f(t)$进行采样，前一个时

期的采样值保持到下一个采样发生时为止。通过 ZOH 产生的 DT 信号如图 1.3 所示，其中在每个采样周期中的样本值均是一个常数，样本可以取任何连续值。这种类型的信号被称为采样信号，并广泛用于采样控制系统和开关电容滤波器。然而，保持样本值恒定的时间间隔只是整个系统采样时间的一个极小部分。

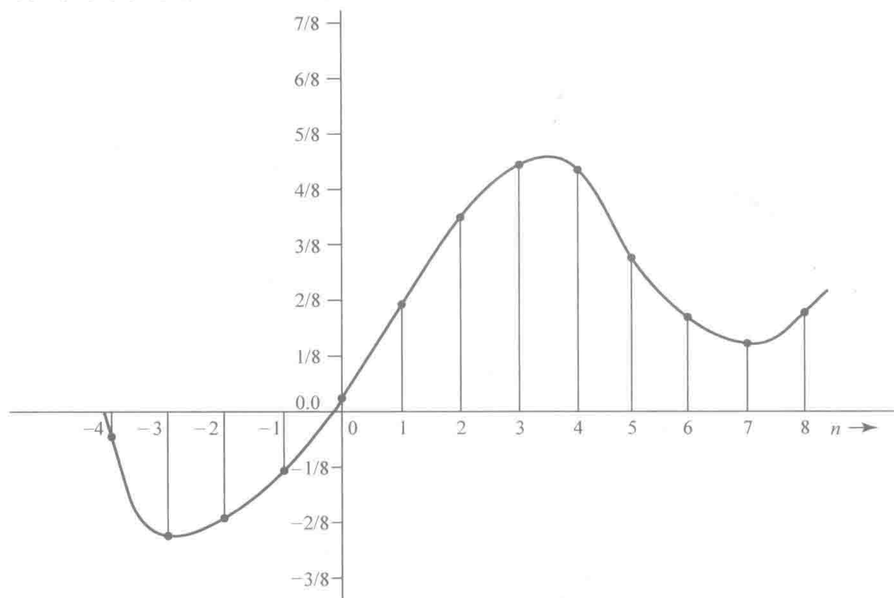


图 1.2 连续时间函数 $f(t)$ 和离散时间函数 $f(n)$

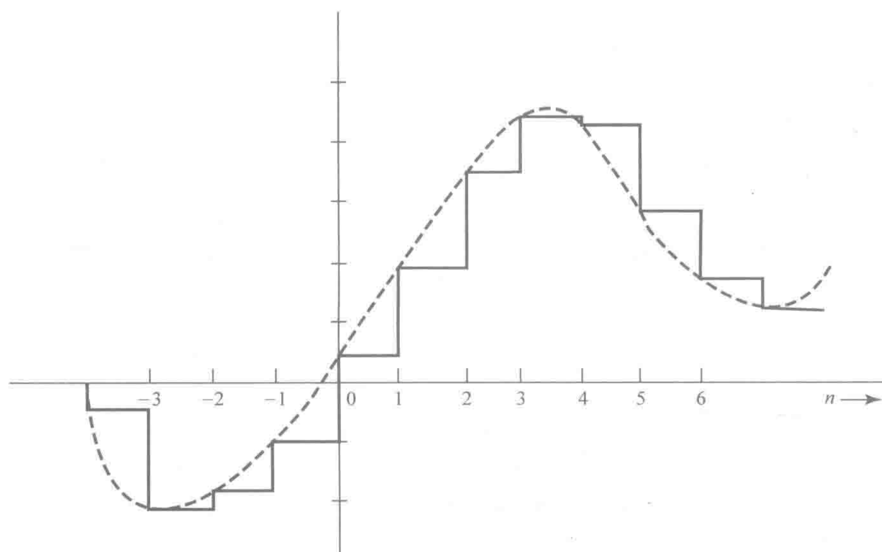


图 1.3 采样数据信号

当采样值通过ZOH电路在周期T（或者是T的一小部分）内作为输出保持不变时，信号可以通过量化器电路被转换成一个值，以二进制形式表示为有限值。这样的过程称为二进制编码或量化。这个过程将在第7章详细讨论。数值表示的精度由二进制位数决定。例如，如果选择3位，使用一个称为“有符号定点值二进制表达”的方法来表达它们的值，多出的一位表示正或负，我们有有限数量的值，用二进制表示形式和等效十进制的形式。请注意，一个4位二进制形式可表达-7/8～7/8之间的值，并有15个数值等级，如表1.1所示。所以ZOH的输出值$f(n)$，位于这些不同量级之间，并根据量化器的一些规则舍入或截断，当量化器输出编码成等效的二进制形式时，称为数字信号。虽然离散时间信号和数字信号是有区别的，在接下来的几个章节我们假设信号是离散时间信号，在第7章，我们会考虑把信号量化为二进制形式对滤波器频率响应的影响。然而，在本书中使用的数字滤波器和离散时间系统是可互换的。连续时间信号与系统也可分别被称为模拟信号和模拟系统。一个包含ZOH电路和量化器的系统被称为模拟-数字转换器（ADC），将在第7章中进行更详细的讨论。

表1.1 4位二进制数和其十进制等价数

二进制形式	十进制数值
$0_{\triangle}111$	$\frac{7}{8}=0.875$
$0_{\triangle}110$	$\frac{6}{8}=0.750$
$0_{\triangle}101$	$\frac{5}{8}=0.625$
$0_{\triangle}100$	$\frac{4}{8}=0.500$
$0_{\triangle}011$	$\frac{3}{8}=0.375$
$0_{\triangle}010$	$\frac{2}{8}=0.250$
$0_{\triangle}001$	$\frac{1}{8}=0.125$
$0_{\triangle}000$	$0.0=0.000$
$1_{\triangle}000$	$-0.0=-0.000$
$1_{\triangle}001$	$-\frac{1}{8}=-0.125$
$1_{\triangle}010$	$-\frac{2}{8}=-0.250$
$1_{\triangle}011$	$-\frac{3}{8}=-0.375$
$1_{\triangle}100$	$-\frac{4}{8}=-0.500$
$1_{\triangle}101$	$-\frac{5}{8}=-0.625$
$1_{\triangle}110$	$-\frac{6}{8}=-0.750$
$1_{\triangle}111$	$-\frac{7}{8}=-0.875$

考虑一个模拟信号，如图 1.2 的实线所示。采样时，假设离散时间序列的值如表 1.2 的第二列所示。用六个重要的十进制数表示它们的值，第三列所示的是截断成四位数时的值。当这些值被量化为四个二进制数字（位）时，十进制值被截断成有限的离散值。十进制数表示值被列在表 1.2 的第四列，用二进制数表示的值被列在表 1.2 的第五列。表 1.2 的第三列所示为 $f(n)$ 的二进制值 $f(n)$ 绘制在图 1.4 中。

表 1.2 十进制和二进制形式的数值

n	$f(n)$ 的十进制值	$f(n)$ 的四位有效数值	$f(n)$ 的量化数值	二进制形式
-4	-0.054307	-0.0543	0.000	$1_{\triangle}000$
-3	-0.253287	-0.2532	-0.250	$1_{\triangle}010$
-2	-0.236654	-0.2366	-0.125	$1_{\triangle}001$
-1	-0.125101	-0.1251	-0.125	$1_{\triangle}001$
0	0.522312	0.5223	0.000	$0_{\triangle}000$
1	0.246210	0.2462	0.125	$0_{\triangle}001$
2	0.387508	0.3875	0.375	$0_{\triangle}011$
3	0.554090	0.5540	0.500	$0_{\triangle}100$
4	0.521112	0.5211	0.500	$0_{\triangle}100$
5	0.275432	0.2754	0.250	$0_{\triangle}010$
6	0.194501	0.1945	0.125	$0_{\triangle}001$
7	0.168887	0.1687	0.125	$0_{\triangle}001$
8	0.217588	0.2175	0.125	$0_{\triangle}001$

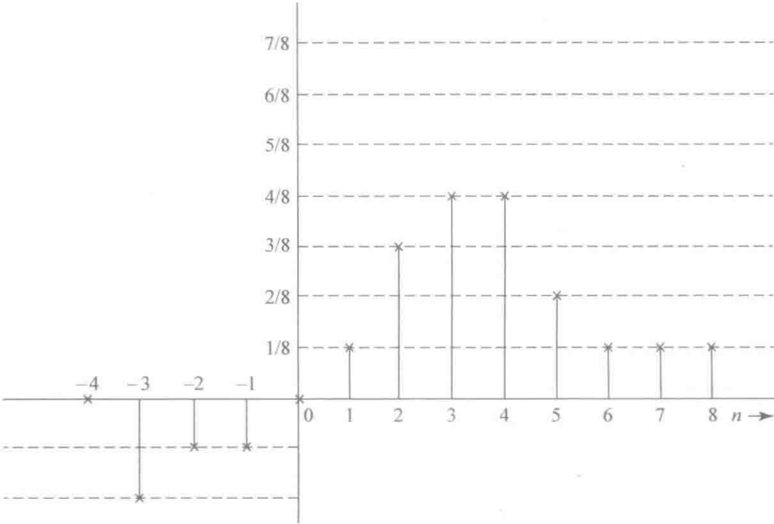


图 1.4 在表 1.2 中的二进制值 $f(n)$ 截断后为 4 位

连续时间信号$f(t)$或离散时间信号$f(n)$把物理量的变化表示为一个变量的函数。一个黑白图像可以看作一个二维信号$f(m, r)$，构成图片的点的强度沿投影面水平轴（x轴；横坐标）和垂直轴（y轴；纵坐标）测量，并被表示为一个有两个整数变量m和r的函数。可以把信号$f(m\ r)$看作是一个二维信号$f(x, y)$的离散形式，x和y是图像的水平和垂直的连续空间变量；T_1和T_2是分别沿着x和y轴的采样周期（单位：m）。换句话说，$f(x, y)|_{x=mT_1, y=rT_2}=f(m, r)$。

一个黑白视频信号$f(x, y, t)$是一个有两个空间坐标x和y和一个时间坐标的3D函数。当离散化时，我们有一个3D离散信号$f(m, p, n)$。当给一个彩色视频信号建模时，它由三个3D信号向量表示，分别代表红、绿、蓝三原色之一或者两个亮度和色度的等价形式。所以这是一个多变量函数或一个多通道信号的例子：

$$\mathbf{F}(m,r,n) = \begin{bmatrix} f_{\mathrm{r}}(m,p,n) \\ f_{\mathrm{g}}(m,p,n) \\ f_{\mathrm{b}}(m,p,n) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

1.3.1 离散时间信号的建模与性质

描述整型变量n和离散时间信号$f(n)$的值之间的函数关系有几种方法：①绘制$f(n)$对n的值，如图1.2所示；②汇总值，如表1.2所示；③当序列是有限数量的样本时，通过把样本值表示为一组集合来定义序列。

例如，如下所示的一个序列$x_1(n)$，箭头表示当$n=0$时样本的值：

$$x_1(n) = \{2 \quad 3 \quad 1.5 \quad \underset{\uparrow}{0.5} \quad -1 \quad 4\} \tag{1.2}$$

用$x(n)$表示DT序列且表示序列在特定值n时的采样值。如果一个序列当$n<0$时为零值，那么它被称为因果序列。说因果函数是一个定义$n \geqslant 0$上的序列是不准确的，因为严格地说，一个DT序列被定义在所有的n值上。因此，应该理解为因果序列在$-\infty < n < 0$上的采样值为零。同样的，当一个函数被定义在$N_1 \leqslant n \leqslant N_2$上时，可以理解为函数值在$-\infty < n < N_1$和$N_2 < n < \infty$上值为零。所以在式（1.2）中的$x_1(n)$序列在$2 < n < \infty$、$-\infty < n < -3$上为零值。下面给出的离散时间序列$x_2(n)$是一个因果序列。用这种形式表示$x_2(n)$，表明在$-\infty < n < 0$和$4 < n < \infty$上$x_2(n) = 0$：

$$x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1} \quad -2 \quad 0.4 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \tag{1.3}$$

有限序列的长度通常被其他作者定义为采样值的数量，这在上面给出的像$x_2(n)$序列的例子中有点模棱两可。函数$x_2(n)$和下面给出的$x_3(n)$是一样的：

$$x_3(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1}\quad -2\quad 0.4\quad 0.3\quad 0.4\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\right\} \tag{1.4}$$

但它有更多的采样点吗？所以根据上述定义序列 $x_3(n)$ 的长度将不同于 $x_2(n)$ 的长度。当考虑到像下面给出的 $x_4(n)$ 一样的序列时，定义给出的又是模棱两可的回答：

$$x_4(n)=\left\{\underset{\uparrow}{0}\quad 0\quad 0.4\quad 0.3\quad 0.4\right\} \tag{1.5}$$

在下一章中，当我们把一个多项式的阶数（或次数）用 Z^{-1} 表示一个 DT 序列的 Z 变换时，一个 DT 序列的长度将被重新定义。

为了给离散时间信号建立数学模型，而不是像上面给出的值也不是如图 1.2 所示的点，我们将在下面介绍一些基本的 DT 函数。

1.3.2 单位脉冲函数

单位脉冲函数 $\delta(n)$ 的定义

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{1.6}$$

如图 1.5a 所示。它通常被称为单位采样函数和单位冲激函数。但注意，$\delta(n)$ 函数在 $n=0$ 时是一个有限值并且在其他整数 n 时为零，而单位冲激函数 $\delta(t)$ 的定义是完全不同的。

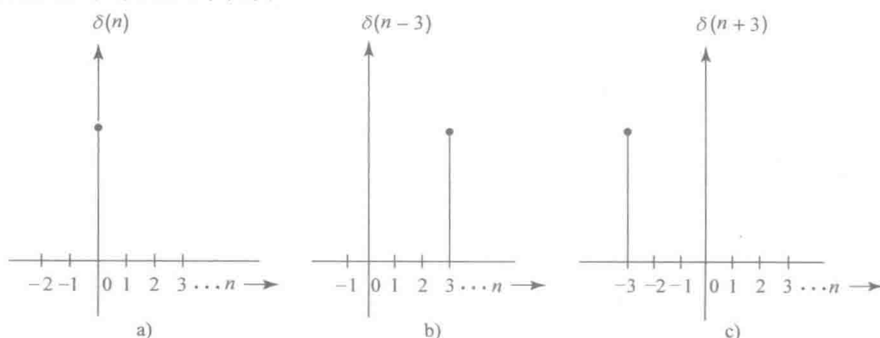


图 1.5 单位脉冲函数 $\delta(n)$，$\delta(n-3)$ 和 $\delta(n+3)$

当单位脉冲函数延迟 k 个采样时，描述如下：

$$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases} \tag{1.7}$$

当 $k=3$ 时如图 1.5b 所示。当 $\delta(n)$ 超前 $k=3$ 时，我们得到 $\delta(n+k)$，并绘制在图 1.5c 中。

1.3.3 常数序列

$x(n)$序列在所有 n 上都为一个恒定值，因此定义为 $x(n)=K$；$-\infty<n<\infty$。

1.3.4 单位阶跃函数

单位阶跃函数 $u(n)$定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{1.8}$$

如图 1.6a 所示。

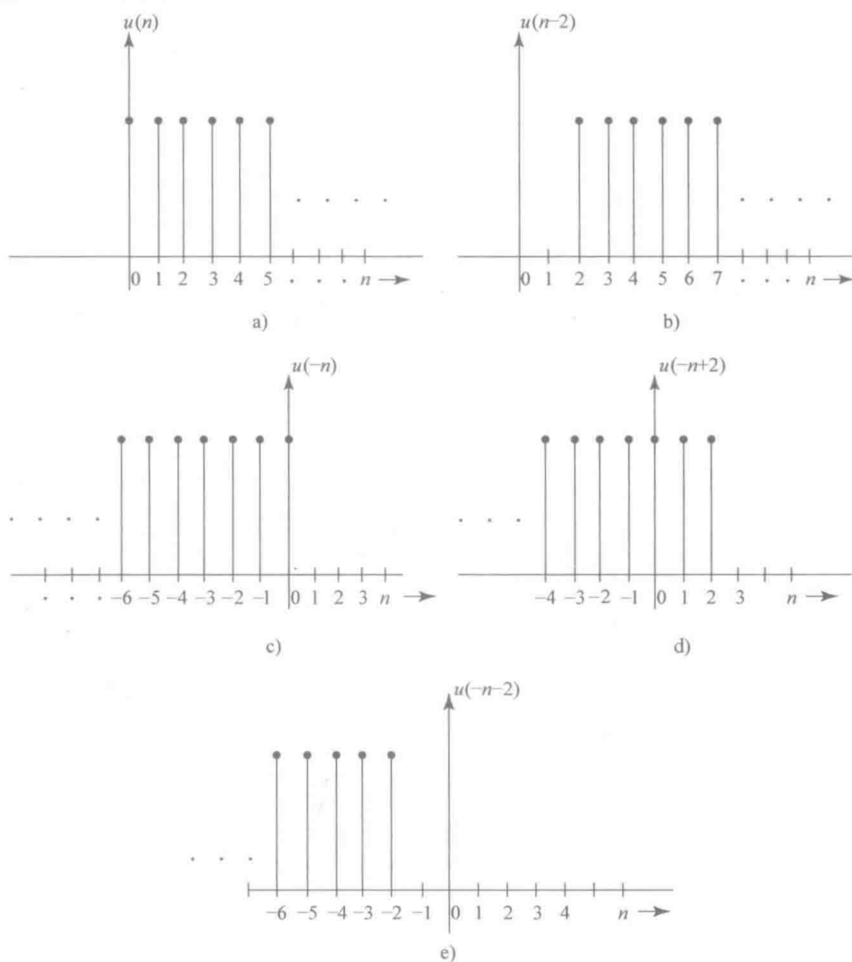


图 1.6 单位阶跃函数

单位阶跃函数延迟 k 个采样，k 是一个正整数，则

$$u(n-k)=\begin{cases}1 & n\geq k\\ 0 & n<k\end{cases} \tag{1.9}$$

如果 $u(n)$ 超前 k 个采样则得到序列 $u(n+k)$，定义为

$$u(n+k)=\begin{cases}1 & n\geq -k\\ 0 & n<-k\end{cases} \tag{1.10}$$

此外还定义了函数 $u(-n)$，它是 $u(n)$ 在时间上进行翻转得到的，在 $n>0$ 时序列等于零。序列 $u(-n+k)$ 和 $u(-n-k)$ 分别由 $u(-n)$ 延迟 k 和超前 k 得到，其中 k 是一个正整数。换句话说，$u(-n+k)$ 当 k 为正整数时，由 $u(-n)$ 延迟得到；当 k 是一个负整数时，由 $u(-n)$ 超前得到。注意，当 k 取正值和负值时，对 $u(-n-k)$ 和 $u(n-k)$ 的影响是相反的。当 $k=2$ 时，这些函数如图 1.6 所示。从严格意义上说，所有这些函数都是隐形地定义为 $-\infty<n<\infty$。

1.3.5 实指数函数

实指数函数被定义为

$$x(n)=a^n;\quad -\infty<n<\infty \tag{1.11}$$

其中 a 是实常数。如果 a 是一个复常数，它就变为复指数序列。实指数序列或复指数序列也可以定义为一个更一般的形式关系

$$x(n)=\begin{cases}a^n & k\leq n<\infty\\ b^n & -\infty<n<k\end{cases} \tag{1.12}$$

我们经常使用的离散时间序列是一个被定义在 $n\geq 0$ 上的函数：

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1.13}$$

序列 $x_1(n)=(0.8)^n u(n)$ 如图 1.7a 所示。函数 $x_2(n)=x_1(n-3)=(0.8)^{(n-3)}u(n-3)$ 是由 $x_1(n)$ 延迟三个采样点得到的，如图 1.7b 所示。但函数 $x_3(n)=(0.8)^n u(n-3)$ 是通过去掉 $x_1(n)=(0.8)^n u(n)$ 的前三个采样点得到的，如图 1.7c 所示，它不同于 $x_2(n)$。

1.3.6 复指数函数

复指数序列是一个 n 的复函数。这个函数的最一般的形式为

$$x(n)=A\alpha^n,\quad -\infty<n<\infty \tag{1.14}$$

A 和 α 都是复数。如果令 $A=|A|e^{j\phi}$、$\alpha=e^{(\sigma_0+j\omega_0)}$，其中 σ_0，ω_0 和 ϕ 是实数，序列可以扩展为

$$\begin{aligned}x(n)&=|A|e^{j\phi}e^{(\sigma_0+j\omega_0)n}\\&=|A|e^{\sigma_0 n}e^{j(\omega_0 n+\phi)}\\&=|A|e^{\sigma_0 n}\cos(\omega_0 n+\phi)+j|A|e^{\sigma_0 n}\sin(\omega_0 n+\phi)\\&=x_{re}(n)+jx_{im}(n)\end{aligned} \tag{1.15}$$

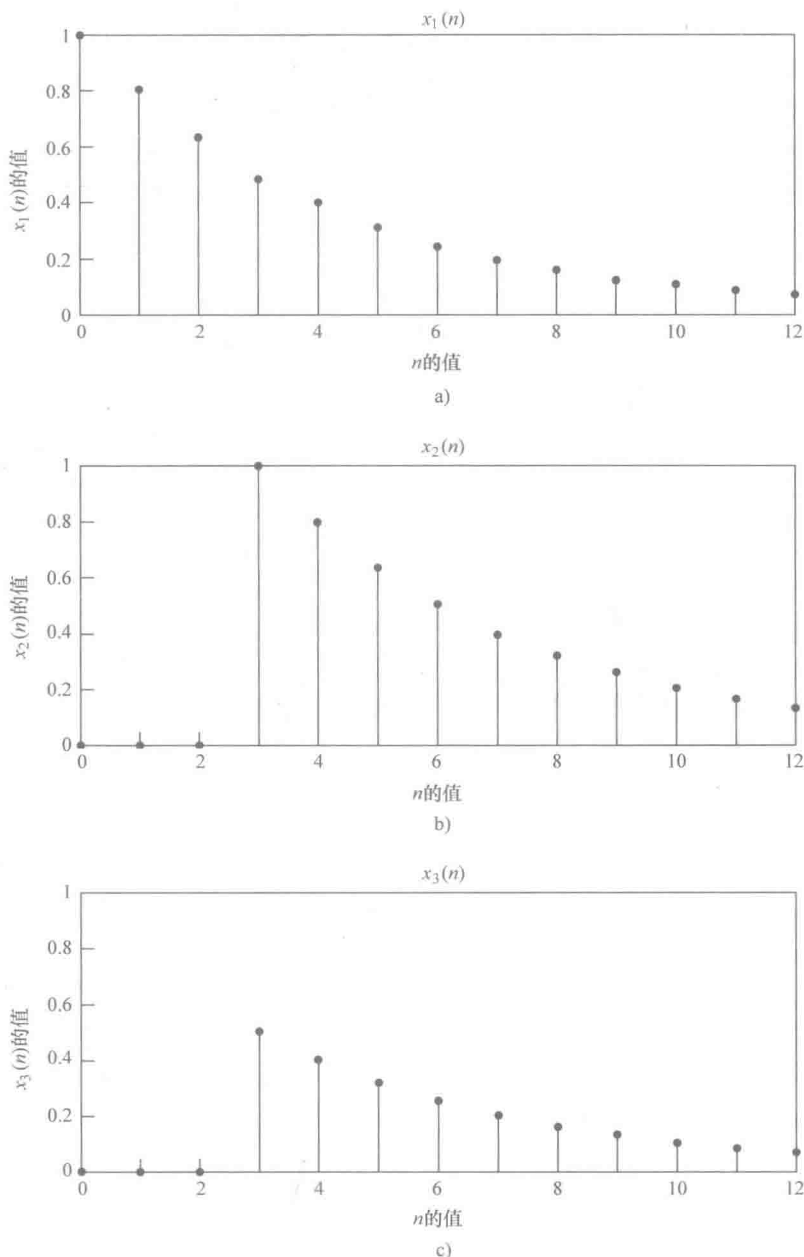


图1.7　$x_1(n)$，$x_2(n)$和$x_3(n)$

当$\sigma_0 = 0$时，复指数序列的实部和虚部分别为$|A|\cos(\omega_0 n + \phi)$和$|A|\sin(\omega_0 n + \phi)$，是一个振幅等于$|A|$的正弦序列。$\sigma_0 > 0$时，两个序列随着$n \to \infty$递增，当$\sigma_0 < 0$时随着$n \to \infty$递减。当$\omega_0 = \phi = 0$时，序列简化为实指数序列$|A| e^{\sigma_0 n}$。

1.3.7 cos（$\omega_0 n$）的性质

当 $A=1$，$\sigma_0=\phi=0$ 时，得到 $x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$。当与连续时间函数 $e^{j\omega_0' t}$ 相比时，这个函数有一些有趣的特性，描述如下。

首先，我们指出，在 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 中的 ω_0 是 $f_s=1/T$ 的归一化频率，f_s 是以 Hz 为单位的采样频率，T 是以 s 为单位的采样周期，具体来说，$\omega_0=2\pi f'_0/f_s=\omega'_0 T$，$\omega'_0=2\pi f'_0$ 是以 rad/s 为单位的实际实频率，f'_0 是以 Hz 为单位的实频率。所以归一化频率 ω_0 的单位是 rad。这是常见的做法，在离散时间系统选择 ω 作为归一化频率变量，以下章节也遵循这个概念，这里把 ω_0 表示为一个以弧度为单位的常数。在后面的章节将再讨论这个归一化频率。

性质 1.1 在复指数函数 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 中，两个频率由 2π 的整数倍数区别开来。换句话说，很容易得到 $e^{j\omega_0 n}=e^{j(\omega_0 n+2\pi r)}$。函数 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 的实部和虚部都是正弦函数，也具有这个特性。例如，$x_1(n)=\cos(0.3\pi n)$ 和 $x_2(n)=\cos(0.3\pi+4\pi)n$，如图 1.8 所示。相比之下，我们知道如果 ω_1、ω_2 不同，那么两个连续时间函数 $x_1(t)=e^{j\omega_1 t}$ 和 $x_2(t)=e^{j\omega_2 t}$ 或它们的实部和虚部就不同。即使被 2π 的整数倍数区分开，它们也是不同的。从上面 $e^{j\omega_0 n}=e^{j(\omega_0 n+2\pi r)}$ 的性质，可以得到另一个重要结果，即当两个函数被复指数函数 $e^{j\omega_0 n}$ 或 $e^{j(\omega_0 n+2\pi r)}$ 激励的时候，离散时间系统的输出有相同的值。将在第 3 章展示这对所有被 2π 的整数倍数分开的频率都适用，因此 DT 系统的频率响应是 ω 的周期函数。

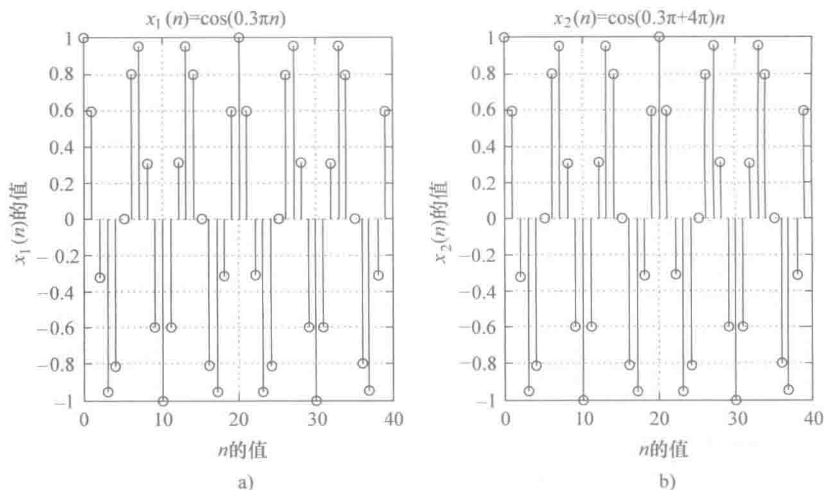


图 1.8 cos(0.3πn) 和 cos(0.3π+4π)n 图示

性质 1.2 $e^{j\omega_0 n}$ 序列的另一个重要性质是它是 n 的周期函数。如果存在一个整数 N，使得 $x(n+rN)=x(n)$，r 是任意整数那么离散时间函数 $x(n)$ 被定义为具有周期性，N 是周期性时间序列的周期。为了找到一个 N 值，使得 $e^{j\omega_0 n}$ 是周

期的，让 $e^{j\omega_0 n}$ 等于 $e^{j\omega_0(n+rN)}$。因此 $e^{j\omega_0 n}=e^{j\omega_0 n}e^{j\omega_0 rN}$，条件满足时 $e^{j\omega_0 rN}=1$，也就是说，当 $\omega_0 N=2\pi K$ 时，条件满足，其中，K 是任意整数。

这个条件是满足以下方程：

$$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{K}{N} \tag{1.16}$$

换句话说，这意味着给定的归一化频率 ω_0 和 2π 的比值必须是一个有理数。时间序列的周期 N 等于

$$N=\frac{2\pi K}{\omega_0} \tag{1.17}$$

当此条件满足 K 为最小整数时，相应的 N 值给出了周期序列的基本周期，并且这个频率的整数倍数是谐波频率。

例 1.1

考虑一个序列 $x(n)=\cos(0.3\pi n)$。在这种情况下，$\omega_0=0.3\pi$，$\omega_0/2\pi=0.3\pi/2\pi=3/20$。因此序列是周期性的且其周期 N 是 20 个采样点。这个周期如图 1.8a 和图 1.8b 所示。

考虑另一个序列 $x(n)=\cos(0.5n)$，在这种情况下 $\omega_0=0.5$。因此 $\omega_0/2\pi=0.5/2\pi=1/4\pi$，这不是一个有理数。因此这不是一个周期性的序列。

当给定的序列是几个复指数函数的总和时，每个都是周期不同的周期序列，它仍然是周期性的。举一个例子来说明这种情况下找一个基本周期的方法。

假设 $x_3(n)=\cos(0.2\pi n)+\cos(0.5\pi n)+\cos(0.6\pi n)$。其基本周期 N 必须满足条件

$$N=\frac{2\pi K_1}{0.2\pi}=\frac{2\pi K_2}{0.5\pi}=\frac{2\pi K_3}{0.6\pi} \tag{1.18}$$

$$=10K_1=4K_2=\frac{10K_3}{3} \tag{1.19}$$

K_1，K_2，K_3 和 N 是整数。当 $K_1=2$，$K_2=5$，$K_3=6$ 时，满足这个条件的 N 值是 20。所以 $N=20$ 是 $x_3(N)$ 的基本周期。序列 $x_3(n)$ 绘制在图 1.9 中，$0\leqslant n\leqslant 40$，表明它是一个有 20 个采样点的周期序列。

性质 1.3 已经观察到频率 ω_0 和 $\omega_0+2\pi$ 是相同的，因此振荡的频率是一样的。但是考虑 ω_0 在介于 0 和 2π 之间变化时的振荡频率，发现正弦序列 $\cos(\omega_0 n)$ 的振荡频率随着 ω_0 从 0 增加到 π 而增加，振荡的频率随着 ω_0 从 π 到 2π 的增加而减少。因此当 $\omega_0=\pm\pi$ 时离散时间序列 $\cos(\omega_0 n)$ 达到最高振荡频率。当归一化频率 $\omega_0=2\pi f'_0/f_s$ 取得 π 值时，$f'_0=f_s/2$。所以振荡的最高频率等于采样频率的一半。为了说明这个性质，在图 1.10 中给出当 ω_0 取得介于 0 到 2π 之间的一些值时 DT 的序列图。将在后面的章节详细说明该性质。

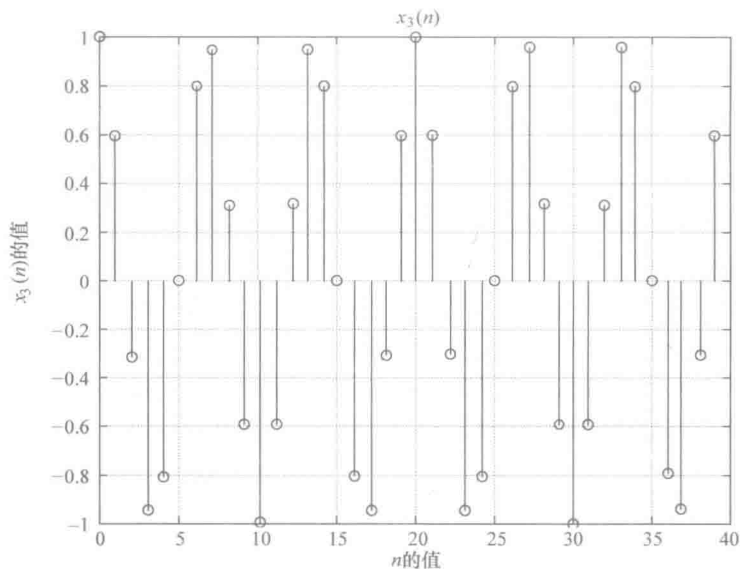


图 1.9 $x_3(n)$

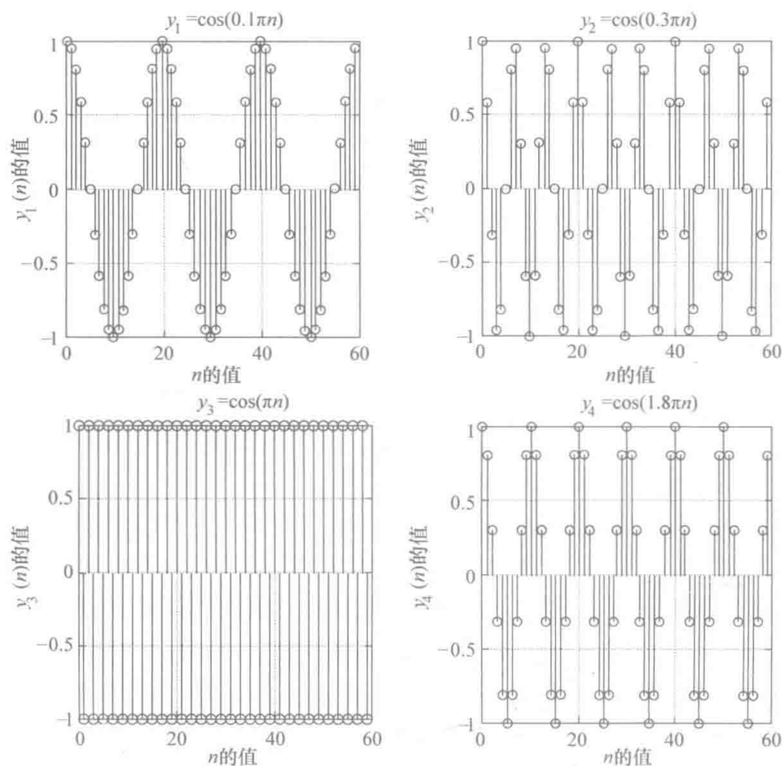


图 1.10 ω_0 在 $0\sim2\pi$ 之间取不同值时的 $\cos(\omega_0 n)$ 的值

因为频率相差 2π 是相同的，ω_0 从 2π 到 3π 增加和从 0 到 π 增加，振荡频率以同样的方式增加。举一个例子，我们看到 $v_0(n) = \cos(0.1\pi n)$ 的频率和 $v_1(n) = \cos(2.1\pi n)$ 的频率是一样的。有趣的是，$v_2(n) = \cos(1.9\pi n)$ 的频率振荡和 $v_1(n)$ 也是一样的，因为

$$v_2(n) = \cos(1.9\pi n) = \cos(2\pi n - 0.1\pi n)^{㊀} \tag{1.20}$$

$$= \cos(2\pi n)\cos(0.1\pi n) + \sin(2\pi n)\sin(0.1\pi n) \tag{1.21}$$

$$= \cos(0.1\pi n)$$

$$= v_0(n)$$

$$v_1(n) = \cos(2.1\pi n) = \cos(2\pi n + 0.1\pi n) \tag{1.22}$$

$$= \cos(2\pi n)\cos(0.1\pi n) - \sin(2\pi n)\sin(0.1\pi n) \tag{1.23}$$

$$= \cos(0.1n)$$

$$= v_0(n)$$

在图 1.11 中绘制了序列 $v_1(n)$ 和 $v_2(n)$，以验证该属性。

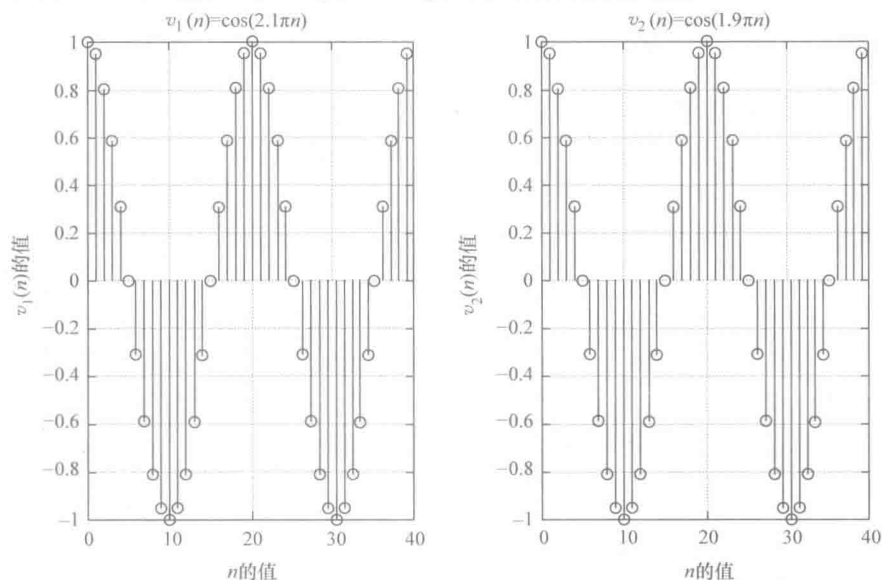


图 1.11 cos（2.1πn）和 cos（1.9πn）

记住，在第 3 章中，将使用术语“折叠”来描述这个性质的新意义。也将在第 3 章说明，一类离散时间信号可以表示为指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的加权和的形式，并且这样一个模型使我们获得一些强大的数字信号处理分析技术。

本章已经描述了表征 DT 序列的几种方法。使用单位采样函数和单位阶跃函数，可以用其他方式表达 DT 序列，如下所示。

㊀ 原书为 $v_2(n) = \cos(1.9\pi n) = \cos(2\pi - 0.1\pi n)$，有错误。——译者注

例如，$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$和$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{m=n}\delta(m)$。一种给序列建立数学模型的方法就是移位的单位采样函数的加权和，所给如下

$$x(n)=\left\{2 \quad 3 \quad 1.5 \quad \underset{\uparrow}{0.5} \quad -1 \quad 4\right\} \tag{1.24}$$

则

$$x(n)=2\delta(n+3)+3\delta(n+2)+1.5\delta(n+1)+0.5\delta(n)-\delta(n-1)+4\delta(n-2) \tag{1.25}$$

如果序列给出了一种解析形式$x(n)=a^n u(n)$，它也可以表示为冲激函数的加权和：

$$x(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}a^m\delta(n-m) \tag{1.26}$$

在下一章，将介绍一个变换称为z变换，将用于以附加的形式建立DT序列模型。我们将表明，式（1.26）给出的模型在推导z变换和离散时间系统的性能分析上是非常有用的。

1.4 滤波器设计发展史

滤波器是在1.2节中提到的所有应用中最常见的一种信号处理形式，用来消除某些频率并且改进其他一些频率的幅值、相位或信号频谱某些部分的群延迟。绝大多数有关滤波器的文献包括两个部分：①推导使滤波器的幅度、相位或群延迟接近给定频率响应指标的近似理论；②使用硬件组设计滤波器过程。最初的滤波器是由电感器、电容器和变压器设计组成的，通常连接负载的电阻和电源内部电阻。这些LC（电感×电容）滤波器，在19和20世纪的许多年里很好地满足了电话网络里的滤波需求。当真空管和双极结型晶体管被发明出来的时候，设计过程必须为了把这些有源的模型设备集成到滤波器电路中而改变，但是滤波器的近似数学理论是独立于这些设备而发展的。在20世纪下半叶，使用双极型晶体管的运算放大器出现了并且没有电感的滤波器被设计出来以实现传输功能。设计过程要简单得多，并且设备技术也相应提高了，用来生产沉积在陶瓷基板上的厚膜和薄膜形式的电阻，而不是使用印制电路板。这些滤波器没有使用电感器和变压器，被称为有源RC（电阻×电容）滤波器。20世纪的下半叶，发展了开关电容滤波器，它们是目前用于音频应用中最常见的滤波器类型。这些滤波器只包含使用互补金属氧化物半导体（CMOS）晶体管的电容器和运算放大器。它们没有使用电阻和电感，整个电路使用超大规模集成（VLSI）技术设计。模拟信号通过这些滤波器被转换成采样信号，信号处理被视为模拟信号处理。但是后来，信号被转换为离散时间信号，离散时间系统理论目前被用于分析和设计这些滤波器。LC滤波器，有源RC

滤波器，能实现三阶低通滤波功能的开关电容滤波器的例子如图 1.12 ~ 图 1.14 所示。

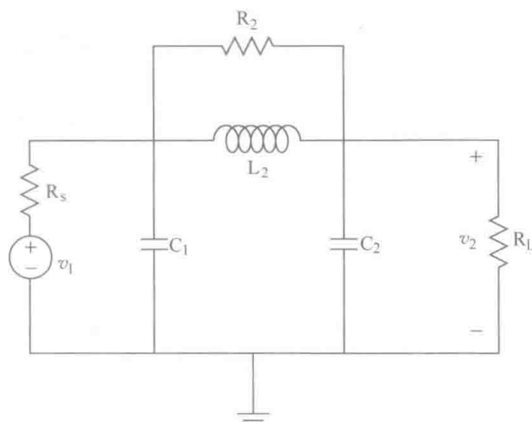


图 1.12　LC 低通模拟滤波器

数字信号处理的发展有着不同的历史。起初，离散时间系统理论的发展是由微分方程中积分和插值的数学方法所推动的。当计算机开始出现后，通过微分方程建立的物理系统建模的解决方案便由数字计算机实现。随着数字计算机在计算能力方面变得越来越强大，它们在石油工业的地质信号处理和电信行业的语音处理中被大量使用。数字滤波器理论的成熟及建立在集成电路技术基础上的更强大的计算机的出现，使得数字信号处理的理论和应用在过去的几十年里迅速发展。形成数字信号处理基础的两个革命性的成果，是香农采样定理和 Cooley – Tukey 快速傅里叶变换技术算法，在下面章节将详细讨论。香农采样定理证明，如果一个连续时间信号的频带有限（即，如果在最高频率 f_m 之上其傅里叶变换为零），在信号中以大于最高频率两倍的采样频率进行采样，那么模拟信号中包含的任何信息都不会丢失，连续时间信号可以通过采样的离散时间信号准确重构。在实际应用中，大多数的模拟信号首先通过一个模拟低通滤波器即预处理过滤或抗混叠过滤器——超出所需频带的输出频率经低通滤波器后会被削弱，这样它就可以被认为是一个带限信号。正是这种信号被采样、转换为离散时间信号且通过模拟 - 数字转换器（ADC）被编码为数字信号，这在本章早些时候就简要地讨论了。把离散时间信号视为所设计的数字滤波器的输入，它能改善原模拟信号中包含的信息或其等效离散时间信号所产生的采样。数字低通滤波器的一个典型的例子如图 1.15 所示。

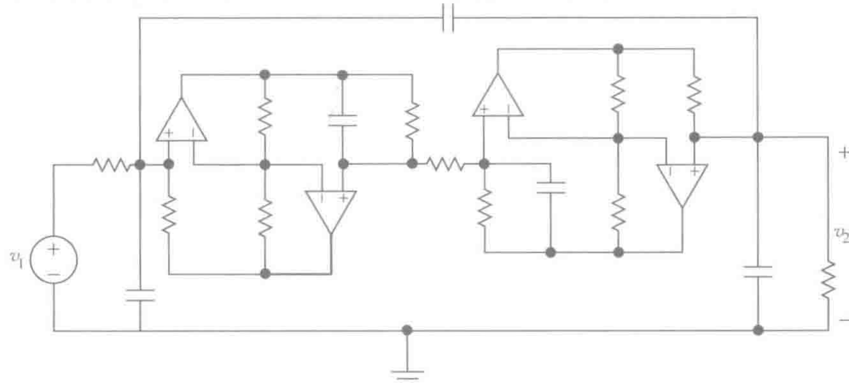


图 1.13　一个有源 RC 低通模拟滤波器

图 1.14 开关电容低通（模拟）滤波器

图 1.15 一个低通三阶数字滤波器

数字滤波器的输出被输入如图 1.17 所示的数—模转换器（DAC），还使用一个能够使来自于 DAC 的采样信号变平滑的低通模拟滤波器，被称为“平滑滤波器”。因此在如图 1.17 所示平滑滤波器的输出将得到一个模拟信号 $y_{\mathrm{d}}(t)$。很

明显，与如图1.16所示的模拟滤波器相比，图1.17所示的电路需要更多的硬件或涉及更多的信号处理，以过滤掉来自于模拟信号 $x(t)$ 的不需要的频率并且分出一个输出信号 $y_d(t)$。比较这两个电路配置，确定是否可以得到与如图1.16所示的输出 $y(t)$ 相同或几乎相同的输出 $y_d(t)$ 是适当的；如果是这样，数字信号处理电路相比模拟信号处理需要更多的电路，数字信号处理比模拟信号处理到底有什么优点？



图1.16 一个模拟信号处理系统的例子



图1.17 数字信号处理系统例子

1.5 模拟和数字信号处理

数字滤波器的基本元素是乘数器、加法器和延迟元件，它们根据一个由滤波器传递函数或其等效模型决定的算法来执行乘法、加法、移位操作（这些模型将在第3章和第7章中讨论）。它们与模拟滤波器相比提供更大的灵活性和多功能性。输入信号传递函数的系数和样本值可以存储在数字滤波器硬件或计算机内存上（PC、工作站或大型计算机），通过改变系数，可以改变滤波器的传递函数，当改变输入的样本值时，能得到任意输入信号的滤波器响应。这种灵活性是不容易应用在模拟滤波器上的。

在时分复用方案下数字滤波器易于编程做分时过滤，而模拟信号时间分组之间不能交叉。数字滤波器可以作为时变滤波器被设计，通过改变采样频率和改变系数成为随时间变化的函数，即通过改变相应的算法，可以将数字滤波器设计成时变滤波器。

数字滤波器具有高精度和可靠性的优势。通过增加表示滤波器传递函数的系数和输入信号值的位数，可以获得很高的精度。又可以通过选择浮点表示的二进制数增加信号的动态范围和传递函数系数。用于模拟滤波器的电容电感的值、运算放大器参数和CMOS晶体管的参数等都无法达到如此高的精度。即使可以获得高精度模拟元件，经过长时间使用，它们也会由于允许公差、温度、湿度和其他参数——依赖设备使用的技术类型的影响产生很大的漂移，因此它们的滤波器响应最终缓慢衰减，直至不符合要求。至于数字滤波器，这样的影响是不存在的，因为转移系数字长以及加乘单元数不会随任何模拟电路环境变化而改变。因此，

数字滤波器的可靠性远高于模拟滤波器，这意味着它们的应用更经济。当然，由于不可预见的因素灾难性的失败同样可能在这两种情况下出现。如果使用计算机来分析、设计和模拟这些滤波器，甚至可以假定代表的数字滤波器系数和信号样本为双精度格式。需要指出的是，我们可以对很多滤波器进行多种条件下的仿真、分析及设计，如蒙特卡罗分析、最坏情况分析或迭代优化测试设计。当然，在模拟滤波器或连续时间系统（如模拟控制系统）的情况下也可以利用 MATLAB 或 Simulink 等软件进行同样的测试。在模拟过滤器的制造中，我们可能不得不逐一调整它们来纠正制造公差，但是在数字过滤器中没有必要测试字长的准确性。

数字滤波器的数据可以存储在磁带、光盘（CD）、数字电视唱盘（DVD）和光学磁盘进行无限期保存。对它们可以进行没有任何退化或丢失数据的检索；用 CD 录制音乐就是一个很好的例子。相反，模拟信号随着时间的流逝慢慢恶化，无法进行没有任何损失的检索。没有简单的方式存储传递函数系数，它定义了模拟系统及供给模拟系统存储装置上的输入信号。

通过使用数字滤波器，可以实现许多传输模拟滤波器无法实现的功能。例如，除了那些已经在上面所提到的，利用数字滤波器可以实现以下特点：

1）过渡频带比从模拟滤波器得到的小得多；例如：一个具有 5000Hz 带宽的低通滤波器，通带波纹为 0.5dB，在 5010Hz 上的衰减为 100dB。频谱分析仪和综合器、语音编码器（语音记录器）和类似的设备在邻近的通带上要求非常低的幅度和相位响应，数字滤波器可以被设计用于满足这些要求。

2）有限冲激响应与线性相位滤波器。模拟滤波器没有这些特征。具有这些特征的数字滤波器在许多应用程序中得到了广泛应用。

3）5Hz 数量级甚至小数带宽，通常用来处理生物医学或地震信号。

4）可编程滤波器，多重速率滤波器，多维滤波器，自适应滤波器。可编程滤波器用来调整滤波器的频率选择特性。多重速率滤波器用于处理很多不同波动速率的复杂信号，而二维数字滤波器用于图像处理。当发射器和接收器之间的传输介质改变——要么传输线切换到不同的接收器时，要么当它在发射器或接收器间的连接改变时，自适应滤波器一直被使用。例如，当一个通话从一个点切换到另一个点，电缆或微波链路发生变化，或当手机在一个广阔的范围内随着人移动时，绝对有必要使用自适应滤波器对信号通过传输链时的失真进行补偿。

5）我们选择滤波器只作为一个比较数字和模拟信号处理器的例子。还有许多其他类型的数字信号处理是可行的，并被使用着，这在模拟过滤器中是不可能的或是低效的。例如，信号传输错误检测和校正，减少错误率是一种先进的技术，被应用在许多应用中。另一个例子是我们可以用一个很大因子压缩数据并且以较低的成本和非常好的质量接收输入信号。为了指出数字信号处理理论的强大

和可用的数字信号处理器，再次以手机为例。Bateman 和 Patterson - Stephans 指出，“在电话内，单个 DSP 设备可能执行实时语音压缩、视频压缩、回波消除、降噪，语音识别，波形编码、调制/解调、交织、多路径均衡、软判决译码、卷积、自动频率、功率和增益控制”[3]，它们在一个有 TDMA、CDMA 和模拟信号处理的三重频带电话内完成！手机仅仅是一个来说明建立在上面描述的任何应用的数字信号处理技术数量巨大的例子。但如移动电话的应用也可以实现其他功能，它们的特点简要描述如下。

1.5.1 移动电话网络的运营

考虑一部分移动电话网络运营的一个地理区域。它被分为如图 1.18 所示的蜂窝。蜂窝在区域上是不相等的，在话务量高的区域可能小至 300m，在农村会大至 35km。每个蜂窝的大小和形状取决于给移动电话提供服务的天线的辐射方向和功率输出（并不是相等的六角形状和大小）。基站控制器（BSC），通常安装在塔上，为多达 124 个收发站（BTS）提供服务。这些收发站与已知所有位于蜂窝所覆盖区域的手机通信。BTS 变换不同的频率，也称为“频道”，传送和接收来自手机的信号。全球移动通信系统（GSM）是世界上使用最广泛的移动手机网络系统，在这个系统里，手机发送频率和收发站接收频率位于 890 ~ 915MHz，收发站发射频率和手机接收频率位于935 ~ 960MHz。但为了提高频带利用率，使用相同频率的蜂窝要被分开，这样就没有信道干扰；一个 BTS 使用的频率也要间隔 200kHz。在覆盖范围内位于塔上的基本收发站是通过与移动交换中心（MSC）相连接的固定的数字线路连接的，移动交换中心是与如图 1.19 所示的公共交换电话网络（PSTN）以及互联网相连接的，其他 MSC 也与互联网相连接。

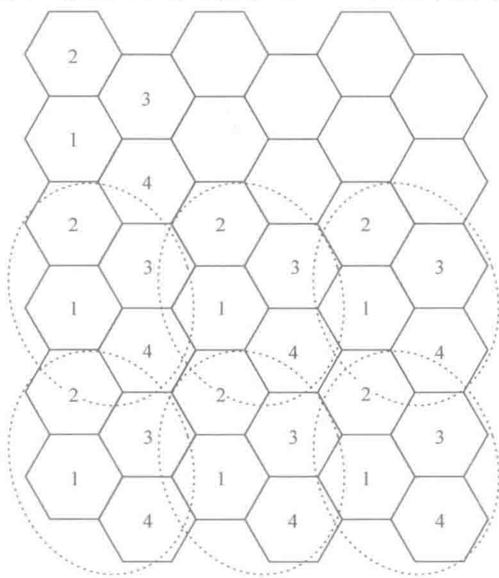


图 1.18 移动网络覆盖区域的小区重复模式

当手机发起通话发送语音、文字、即时消息或其他媒体时，它通过离它最近的 BTS 与网络连接，BTS 跟踪其位置并将此信息传递到位于固定数字线路的移动交换中心（MSC），它把从 BTS 收到的信息不断更新。每个手机都有一个归属位置寄存器（HLR）和访客位置寄存器（VLR）分配给它。HLR 包含有如用户

的身份和在家庭网络中分配给该用户的电话号码的信息以及用户已经订阅的服务，而当用户在家庭网络之外使用手机时，VLR 包含这些信息。因此，当手机发起一个通话时，它将身份信息或取决于手机通话发起时刻手机位置的 HLR、VLR 信息发送给 BTS。移动交换中心检查来自 HLR 和 VLR 的数据来验证电话并允许手机访问网络。当打电话的人在蜂窝范围内移动时，BTS 监控电话和接收方之间的信号强度，如果信号强度低于一定水平，它可能将手机控制转移到下一个蜂窝中的 BTS，这个 BTS 可以提供强信号。如果附近没有这样的蜂窝，那么通话将被切断（即打电话者不能接收或发送电话信号）。

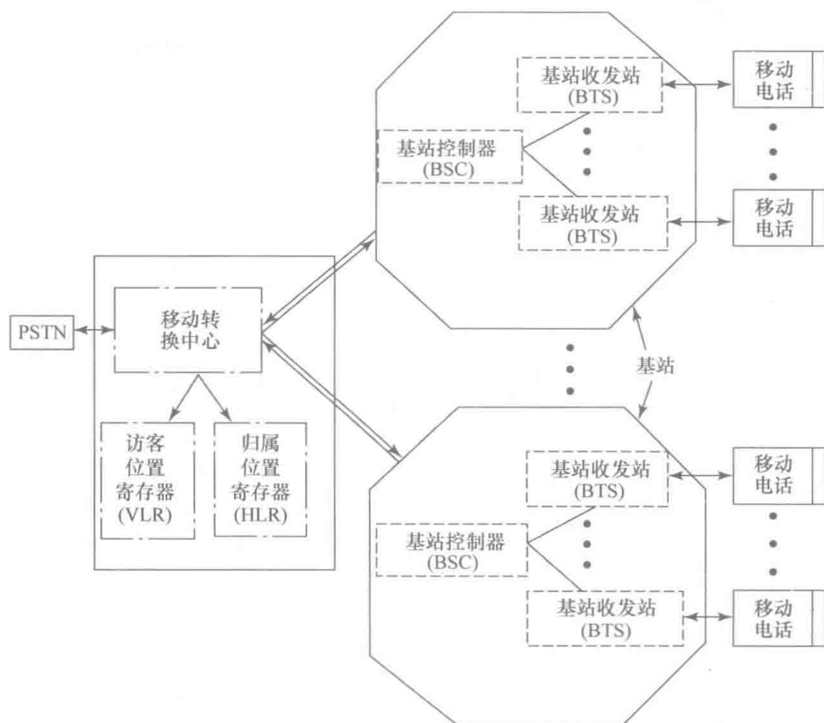


图 1.19 移动手机网络框图

当通话者从一个蜂窝移动到另一个蜂窝时，为其提供服务的 BTS 将控制转移到它所转移到的蜂窝中的 BTS。这是使移动电话成为可能的主要特征。所有这些操作都是由服务于移动手机网络的计算机执行的，这就是所谓的计算机网络技术。它不同于数字信号处理理论。本书提供对数字信号处理基本理论的介绍，这些理论被用于前面提到的语音压缩、多路径均衡、回波消除等技术中。

数字信号处理与模拟信号处理相比有一些缺点和局限性。通过查看图 1.16 和 1.17 中的两个电路，很明显，数字信号处理器是一个更复杂的系统，因为在

数字信号处理器两侧有额外的模拟低通滤波器（ADC和DAC）组件，还有图像中没有显示的额外的控制和编程电路。另一个缺点是，数字信号处理器可以处理被可用的ADC和DAC最高采样频率限制的频带范围内的信号。随着频率的增加，这些设备的字长减少了，因此输入和输出数据的精度和动态范围就减少了。

例如，表1.3中给出一些目前可用的ADC数据[3]。

表1.3 当前可用的ADC

采样速率/(采样数/s)	分辨率/bit	输入信号的最大频率	功率
96000	24	48kHz	90mW
96000	18	48kHz	60mW
96000	16	48kHz	40mW
65000000	14	500MHz	0.6W
400000000	8	1GHz	3W

因此数字信号处理仅限于大约1MHz，而模拟信号处理器可以处理高于那个频率的信号，例如处理雷达信号。在这样的应用中，模拟信号处理是一个更有吸引力和可行的选择，目前很多研究方向是混合信号处理。注意在表1.3中，随着给定信号分辨率（字长）的减少，能耗也减少，但这只是ADC的电力消耗，即使分辨率降低，随着采样频率的增加能量也增加。数字信号处理器本身消耗更多的电能，因此额外的电源管理电路被添加到整个系统中。相比之下，模拟信号处理器消耗更少的能量。LC滤波器消耗很少的能量，可以在兆赫的频率范围操作。有源RC滤波器和开关电容滤波器被限制在音频范围内，但它们比LC滤波器消费更多的能量。预计在一个系统或一个芯片上进行的混合信号处理可以在很大范围提高所处理信号的最大频率，超出对于严格的数字信号处理系统是不可能的范围。因此我们将看到越来越多的频率更高的DSP应用，因为在模拟信号处理中DSP的优点大于缺点。

1.6 小结

在入门性章节中，我们定义了离散时间信号，给出了这些信号的几个例子，以及一些可以应用的简单操作。特别地，我们指出连续时间和离散时间正弦信号之间的区别。讨论采样且量化模拟信号的基本步骤，以滤波器为例，比较数字信号处理和通过一个模拟系统直接进行模拟信号处理的优缺点。在这一过程中，介绍了许多没有解释的术语或缩写。其中一些将在以下章节中详细解释。在第2章将讨论当受到离散时间信号激励时，几种建模一个离散时间系统的方法和在时域中求解得到响应的方法。

习题

1.1 给定两个离散时间信号 $x_1(n)=\{0.9\ 0.5\ 0.8\ \underset{\uparrow}{1.0}\ 1.5\ 2.0\ 0.2\}$ 和 $x_2(n)=\{\underset{\uparrow}{1.0}\ 0.3\ 0.6\ 0.4\}$，画出下列每种情况的图示：

(a) $y_1(n)=x_1(n)+3x_2(n)$

(b) $y_2(n)=x_1(n)-x_2(n-5)$

(c) $y_3(n)=x_1(n)x_2(n)$

(d) $y_4(n)=x_1(-n+4)$

(e) $y_5(n)=y_4(n)x_2(n)$

(f) $y_6(n)=x_2(-n-3)$

(g) $y_7(n)=y_4(n)y_6(n)$

1.2 画出下列每种情况的图示，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是在习题 1.1 中给出的 DT 序列：

(a) $v_1(n) = x_1(n)x_2(4-n)$

(b) $v_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$

(c) $v_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)x_1(n-k)$

(d) $v_4(n) = \sum_{n=0}^{n=10} x_2^2(n)$

(e) $v_5(n) = x_1(2n)$

1.3 重复习题 1.1，其中 $x_1(n)=\{1.0\ \ \underset{\uparrow}{0.8}\ 0.2\ -0.2\ -0.5\ -0.7\}$ 和 $x_2(n)=\{0.5\ \ \underset{\uparrow}{0.2}\ \ 0.1\ \ 0.2\ \ 0.6\}$。

1.4 重复习题 1.2，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 在习题 1.3 中给出。

1.5 求习题 1.1 中给出的 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的偶数和奇数部分。$x_1(n)$ 的偶数部分被定义为 $[x_1(n)+x_1(-n)]/2$，奇数部分为 $[x_1(n)-x_1(-n)]/2$。

1.6 重复习题 1.5，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 在习题 1.3 中给出。

1.7 求 $S_1(k) = \sum_{n=0}^{n=k} n$，画出 $k = 0,1,\cdots,5$ 时的图示。

1.8 已知序列 $S_2(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} x_1(n)$ 和 $S_3(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} x_2(n)$，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 在习题 1.1 给出，计算序列 $S_2(k)$ 和 $S_3(k)$，并绘出序列图。

1.9 重复习题 1.8，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 在习题 1.3 中给出。

1.10 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 表示成移位的单位阶跃函数的加权求和形式的表达

式，$x_1(n)$和$x_2(n)$在习题1.1中给出。

1.11　重复习题1.10，序列$x_1(n)$和$x_2(n)$在习题1.3中给出。

1.12　假设$x(n)=[0.5e^{j(\pi/6)}]^n[u(n)-u(n-4)]$，计算$|x(n)|$的值并描述它们。$x(n)$的实部和虚部分别是什么?

1.13　请表达$x(n)=\sum_{k=0}^{4}[0.5e^{j(\pi/6)}]^k\delta(n-k)$的实部和虚部。

1.14　$q(n)=\sum_{n=0}^{\infty}(0.3-j0.4)^n$的实部和虚部分别是多少?

1.15　$p_1(n)=0.3e^{j\pi n}$的基本周期是多少?

1.16　求$p_2(n)=e^{j0.4\pi n}+2e^{j0.6\pi n}$的基本周期。

1.17　求$p_3(n)=\cos(0.5\pi n)+4\cos(2.5\pi n)$的基本周期。

1.18　$p_4(n)=\cos(0.2\pi n)+\cos(0.7\pi n)+\cos(\pi n)$的基本周期是多少?

1.19　求$p_5(n)=\cos(0.5n)+3\cos(0.2n)$的基本周期。

1.20　求$p_6(n)=p_1(n)p_2(n)$的基本周期，$p_1(n)$和$p_2(n)$在上面已给出。

1.21　求$p_7(n)=\cos(1.2\pi n)+4\sin(0.2\pi n)$的基本周期。

1.22　$p_8(n)=\cos(0.1\pi n)p_3(n)$的基本周期是多少?

1.23　正弦序列$h(n)=\cos(\omega_0 n+\phi)$一个周期内有以下值；求$A$、$\omega_0$和$\phi$的值：

$$h(n)=\{2.00\ 0.00\ -2.00\ -0.00\}$$

参考文献

1. S. K. Mitra and J. F. Kaiser, *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1993, Chapter 1.
2. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.
3. A. Bateman and I. Patterson-Stephans, *The DSP Handbook, Algorithms, Applications and Design Techniques*, Prentice-Hall, 2000.
4. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 1998.
5. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
6. R. D. Strum and D. E. Kirk, *Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1989.
7. S. S. Soliman and M. D. Srinath, *Continuous and Discrete Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1990.
8. L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
9. E. C. Ifeachor and B. W. Jervis, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 2002.
10. V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB$^{(R)}$ V.4*, PWS Publishing, 1997.

第 2 章　时域分析和 z 变换

2.1　线性时不变系统

离散时间系统分析的目的是找到由于输入离散时间信号而引起的系统在时域或频域上的输出。在第 1 章中，将离散时间信号定义为代表离散时间、空间或其他一些物理变量的整型变量 n 的函数。给定 $-\infty<n<\infty$ 区间内的任意整数值，就可以根据一些已知关系找到信号的值。这也可以描述为将整数集合映射到一组离散时间信号值上。根据信号建模的不同方法，对这种关系的描述是不同的。在本章中，将离散时间系统定义为将一组被认为是系统输入的离散时间信号映射到另一组被确定为系统输出的离散时间信号上。这种映射也可以通过一个解析表达式、公式、算法或规则进行定义，从这个意义上讲，如果给定系统输入就可以找到输出信号。因此，映射也可以通过系统的不同模型来描述。映射或输入－输出关系可以是线性的、非线性的、时不变的或时变的。通过这种关系定义的系统如果满足下列条件则是线性的。

假定根据这一关系，$y(n)$是输入 $x(n)$的输出。如果输入为 $Kx(n)$时，生成输出为 $Ky(n)$，则系统满足齐次性条件，其中 K 为任意常数。令 $K_1y_1(n)$和 $K_2y_2(n)$分别是输入 $K_1x_1(n)$和输入 $K_2x_2(n)$的输出，其中 K_1 和 K_2 为任意常数。当输入是 $K_1x_1(n)+K_2x_2(n)$[⊖]时，如果输出是 $K_1y_1(n)+K_2y_2(n)$，则系统满足叠加特性。满足齐次性和叠加性的系统定义为线性系统。当输入延迟了 M 个采样，即当输入是 $x(n-M)$时，如果输出为 $y(n-M)$，则系统为时不变或平移不变。如果输出仅由以前输出值的加权和当前及以前输入值的加权和确定，则系统被定义为因果系统。这意味着输出不依赖于输入的将来值。将在本章的稍后章节中再次详细地讨论这些概念。本书仅考虑线性时不变（LTI）离散时间系统。

另一种定义系统的方法通常是组件或子系统之间的互联，在此我们知道这些组件的输入输出关系，因此它们之间的互联方式就决定了整个系统的输入输出关系。因此可以通过显示组件之间互联关系的电路图来描述离散时间系统模型，这些组件可以是延迟元件、乘法器、加法器，将在下面介绍这些组件。在下面几节中，将使用这两种定义来对离散时间系统进行建模。接下来，在本章的剩余部分，

⊖ 原书为 $K_1y_1(n)+K_2y_2(n)$，有误。——译者注

将讨论离散时间系统的几种时域分析方法，在第 3 章中将讨论频域分析方法。

2.1.1　离散时间系统的模型

首先，考虑一个仅有三个基本组件互联的离散时间系统：延迟元件、乘法器和加法器。这些组件的输入输出关系及其符号表示如图 2.1 所示。第四个组件是调制器，它对两个或两个以上的信号进行调制以实现非线性操作。

延迟元件　$x_1(n)$ → z^{-1} → $y_1(n)=x_1(n-1)$

乘法器　$x_2(n)$ → K → $y_2(n)=Kx_2(n)$

加法器　$x_3(n)$, $x_4(n)$ → Σ → $y_3(n)=x_3(n)+x_4(n)$

调制器　$x_5(n)$, $m_6(n)$ → Σ → $y_5(n)=x_5(n)m_6(n)$

图 2.1　离散时间系统中使用的基本组件

一个典型的离散时间系统如图 2.2 所示，其中输入信号 $x(n)=\{x(0), x(1), x(2), x(3)\}$ 显示在 $v_0(n)=x(n)$ 的左边。

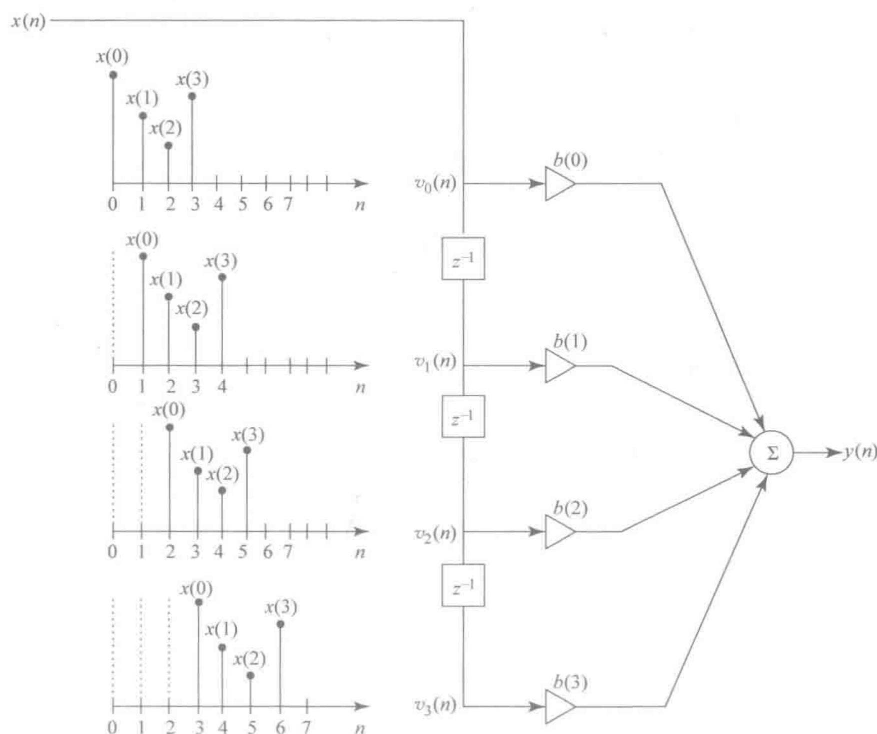


图 2.2　一个典型的离散时间系统运算

左边显示的信号 $v_1(n)$ 是信号 $x(n)$ 延迟了 T 秒或一个采样后的信号，所以，$v_1(n)=x(n-1)$。类似地，$v_2(n)$ 和 $v_3(n)$ 是由信号 $x(n)$ 延迟了 $2T$ 秒和 $3T$ 秒得到的，即：$v_2(n)=x(n-2)$，$v_3(n)=x(n-3)$。当说信号 $x(n)$ 延迟了 T 秒、$2T$ 秒或 $3T$ 秒时，则意味着序列的采样在稍后的 T 秒、$2T$ 秒或 $3T$ 秒后出现，如 $v_1(n)$、$v_2(n)$ 和 $v_3(n)$ 左边的信号曲线所示。但对于任何给定的时间 $t=nT$，$v_1(n)$、$v_2(n)$ 和 $v_3(n)$ 的采样是发生在 $t=nT$ 之前的 T 秒、$2T$ 秒和 $3T$ 秒的输入信号采样。例如，在 $t=3T$ 上，$x(n)$ 的采样值是 $x(3)$，$v_1(n)$、$v_2(n)$ 和 $v_3(n)$ 的当前值分别是 $x(2)$、$x(1)$ 和 $x(0)$。当软件用于设计、仿真和系统的硬件实现时，在分析、测试和调试系统操作中能够很好地理解如图 2.2 所示的离散时间系统的操作是至关重要的。

很容易得出图 2.2 中的输出信号：

$$
\begin{aligned}
y(n) &= b(0)v(0)+b(1)v(1)+b(2)v(2)+b(3)v(3) \\
&= b(0)x(n)+b(1)x(n-1)+b(2)x(n-2)+b(3)x(n-3)
\end{aligned}
$$

其中，$b(0)$、$b(1)$、$b(2)$ 和 $b(3)$ 是乘法器的增益常数。由最后一个表达式也很容易看出，输出信号是输入信号的当前值和以前三个采样值的加权和。这给了一个如图 2.2 所示的系统输入输出关系。

现在考虑另一个离散时间系统的实例，如图 2.3 所示。注意，基本原则是表示加法器的输出并生成和这张离散时间系统电路图中加法器数目一样多的方程。（这一步类似于为模拟电路写节点方程。）将三个加法器的输出表示为 $y_1(n)$、$y_2(n)$ 和 $y_3(n)$，得到

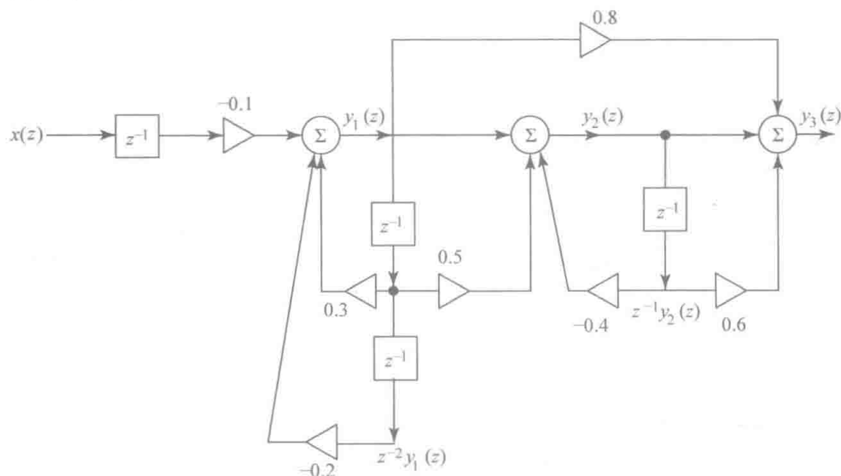


图 2.3　离散时间系统的电路原理图

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= 0.3y_1(n-1)-0.2y_1(n-2)-0.1x(n-1) \\
y_2(n) &= y_1(n)+0.5y_1(n-1)-0.4y_2(n-1) \\
y_3(n) &= y_2(n)+0.6y_2(n-1)+0.8y_1(n) \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

这三个方程给出了图2.3所示的自然原理图模型推导出的数学模型。也可以由方程（2.1）给出的模型推导出（通过画出电路实现）图2.3所示的模型。我们将描述一种在消除了内部变量 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 之后，在输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)=y_3(n)$ 之间获得单一输入输出关系的方法。这种关系构建了第三种系统模型。这种输入输出关系的一般形式是

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) \tag{2.2}$$

或另一种等价形式是

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k); \quad a(0) = 1 \tag{2.3}$$

方程（2.2）显示，输出 $y(n)$ 由以前输出的 N 个值的加权和及当前和以前输入的 $M+1$ 个值的加权和所确定。式（2.3）中所示的系数 $a(0)$ 通常标准化为单位1。

后面，我们将引入 z 变换来表示上述方程组中的离散时间信号，因此，生成更多的系统模型并从 z 域中的这些模型中我们将推导传递函数 $H(z^{-1})$ 和系统的单位采样响应或单位冲激响应 $h(n)$。从 z 域中这些模型中的任何一个，都可以推导出 z 域上的其他模型以及之前在时域上给定的模型。知道如何由任意给定的其他模型获得任何一个模型以便可以有效地使用适当的工具对于分析离散时间系统而言非常重要。在本章中，我们将详细说明离散时间系统的不同模型，接下来将讨论为寻找由不同类型输入信号激励的离散时间系统响应的许多工具和技术。

2.1.2 递归算法

考虑一个如方程（2.2）所示的实例，$y(n)=y(n-1)-0.25y(n-2)+x(n)$，其中输入序列 $x(n)=\delta(n)$，两个初始条件是 $y(-1)=1.0$，$y(-2)=0.4$。

以如下的递归方式计算 $y(0)$，$y(1)$，$y(2)$，…：$y(0)=y(-1)-0.25y(-2)+x(0)$。因为 $x(n)=\delta(n)$，将 $x(0)$ 替代为1，得到 $y(0)=1.0-0.25(0.4)+1=1.9$。接下来，$y(1)=y(0)-0.25y(-1)+x(1)$。从上面所示的步骤中知道 $y(0)=1.9$，并且 $x(1)=0$。因此得到 $y(1)=1.9-0.25(1.0)+0=1.65$。接下来，对于 $n=2$，当计算 $y(2)=y(1)-0.25y(0)+x(2)$ 时，替代上面已知的数值，得到 $y(2)=1.65-0.25(1.9)+0=1.175$。

接下来，当 $n=3$ 时，得到

$$\begin{aligned} y(3) &= y(2) - 0.25y(1) + x(3) \\ &= 1.175 - 0.25(1.65) + 0 = 0.7625 \end{aligned}$$[⊖]

⊖ 原书为0.760，有误。——译者注

可以继续计算 $n=4, 5, 6, 7, \cdots$时输出 $y(n)$的值。

这就是所谓的递归算法，当给定式（2.2）形式的方程时，可以使用递归算法计算输出；当输入是其他任何形式时也可以使用递归算法。对于通过式（2.2）形式的方程进行建模的系统而言，通常输出在长度上是无限的。作为一种特殊情况，当输入是单位冲激函数 $\delta(n)$，初始条件假定为零时，由此产生的输出称为单位冲激响应 $h(n)$（或者更恰当的是单位采样响应），并且其长度是无限的。

考虑乘法器常数 $a(k)=0(k=1, 2, 3, \cdots, N)$ 的系统。则方程（2.2）可以简化为如下形式

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) \\ &= b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + \cdots + b(M)x(n-M) \end{aligned} \tag{2.4}$$

使用递归算法寻找该系统的单位冲激响应，如前所述：

$$y(0)=b(0)(1)+0+0+0+\cdots=b(0)$$
$$y(1)=b(0)x(1)+b(1)x(0)+b(2)x(-1)+0+0+\cdots=b(1)$$
$$y(2)=b(0)x(2)+b(1)x(1)+b(2)x(0)+0+0+0+\cdots=b(2)$$

使用递归算法继续这一过程，可以得到

$$y(3)=b(3)$$
$$y(4)=b(4)$$
$$\vdots$$
$$y(M)=b(M)$$

这个例子引出了以下两个表象：①单位冲激响应的样本数与系数 $b(n)$相同。②系统的单位冲激响应 $h(n)$是有限长度的。

因此，没有证明但通过实例的方式可以得出，通过式（2.2）形式的方程建模的系统单位冲激响应是无限长的，所以这样的系统被称为无限冲激响应（IIR）滤波器，而通过式（2.4）形式的方程进行建模的系统具有有限长的单位冲激响应，它被称为有限冲激响应（FIR）滤波器。在本书的稍后部分，将更多地讨论这两种类型的滤波器。方程（2.3）是普通的、线性非时变 N 阶差分方程，如果必要，可以重写为式（2.2）形式的递归差分方程。可以通过下列四种方法在时域求解方程：

1）使用如上所述的递归算法；

2）使用如下节所述的卷积和得到零状态响应；

3）求解差分方程的经典方法；

4）使用 z 变换的解析解。

应该指出，方法1）～3）要求离散时间系统由单个输入－单个输出方程进行建模。如果给定描述离散时间系统的很多差分方程，则方法1）～3）不适用于在时域寻找输出响应。使用z变换的方法4）是解决这样的问题的唯一强大和通用的方法，因此在本章中将更详细地对其进行讨论并用几个实例进行图解。给定z变换域中的一个模型，我们将显示如何得到递归算法和单位冲激响应$h(n)$以便可以应用卷积求和。z变换方法更多的用于时域分析，如在下一章中所讨论的，频域分析和这一方法也是密切相关的。

2.1.3　卷积和

在上面的讨论中，假定当激励是单位冲激函数$\delta(n)$时，离散时间系统的单位冲激响应是存在（或已知）的，将其表示为$h(n)$。这里不使用递归算法寻找由任意输入引起的响应，将输入信号$x(n)$表示为相应时间上的脉冲函数值，而不是序列$\{x(0), x(1), x(2), x(3), \cdots\}$的值。换句话说，考虑冲激函数序列$x(0)\delta(n)$、$x(1)\delta(n-1)$、$x(2)\delta(n-2)$,…作为输入，而不是值序列$\{x(0), x(1), x(2), x(3), \cdots$。作为数字序列的采样值和上述冲激函数序列之间的差别应该是很容易理解的。第一个操作是简单的采样操作，而第二个操作就是所谓的冲激采样，这是表示相同数据的数学方法，将第二个序列表示为$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$的紧凑形式。表示冲激采样的数学方法是用来分析离散时间系统特性的强大工具，输出冲激函数的值通过分析方法可以获得。这些值被看作是输出信号的数字值。

因为假定系统是线性的，既然$h(n)$是输入$\delta(n)$的响应，则$x(0)h(n)$是$x(0)\delta(n)$的响应。假设系统是线性时不变的，得到输入$x(1)\delta(n-1)$的输出为$x(1)h(n-1)$。通常，输入$x(k)\delta(n-k)$的输出由$x(k)h(n-k)$给定。累加所有冲激$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$的响应，得到总的输出为和

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{2.5}$$

这就是所谓的卷积和，用紧凑符号$y(n) = x(n) * h(n)$表示。求和公式可以用于寻找任意输入信号引起的响应。因此，如果知道系统的单位冲激响应$h(n)$，就可以找到任意输入$x(n)$的输出$y(n)$——因此，这是离散时间系统的另一个模型。然而，相比于递归算法，需要注意的是卷积和不能用于寻找由给定初始化条件引起的响应。如果当输入信号定义为$-\infty < n < \infty$或$-M \leqslant n < \infty$时，求和的下限明显变为$-\infty$。在这种情况下，卷积和公式的通用形式为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{2.6}$$

例如，即使知道 $h(n)=0$（对于 $-\infty<n<0$），如果输入序列 $x(n)$ 定义为 $-M<n<\infty$，则必须使用公式 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$。如果 $x(n)=0$（对于 $-\infty<n<0$），则必须使用公式 $y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)h(n-k)$。

为了理解实现求和公式的过程，我们在下面的实例中选择一种图形方法。记住，如果离散时间系统由一个以上的差分方程来描述，则不能使用递归算法，卷积和要求具有系统单位脉冲响应。我们将会发现，当在时域分析离散时间系统特性时，若使用 z 变换方法则不受这些限制。

例 2.1

给定 $h(n)$ 和 $x(n)$，将独立变量由 n 改变为 k，并绘制曲线 $h(k)$ 和 $x(k)$，如图 2.4a，b 所示。注意，输入序列定义在 $-2\leqslant k\leqslant 5$ 上，但 $h(k)$ 是定义在 $0\leqslant k\leqslant 4$ 上的因果序列。接下来，对 $h(k)$ 做一个时域反转并在图 2.4c 中绘制曲线 $h(-k)$。当 $n\geqslant 0$ 时，通过对 $h(-k)$ 延迟（或右移）n 个采样得到 $h(n-k)$；当 $n<0$ 时，序列 $h(-k)$ 是提前的（或左移）。对于每个 n 值都有 $h(n-k)$ 和 $x(k)$，将 $h(n-k)$ 的采样值和每个 k 值上的 $x(k)$ 相乘并累加到乘积上。

对于这个实例，在图 2.4d 中显示了当 $n=-2$ 时乘积和，在图 2.4e 中显示了 $n=3$ 时的乘积和。输出 $y(-2)$ 仅有一个非零乘积 $x(-2)h(0)$。但输出 $y(3)$ 的采样等于 $x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)+x(3)h(0)$。

但是应当注意，当 $n>9$ 和 $n<-2$ 时，序列 $h(n-k)$ 和 $x(k)$ 不具有重叠样本，因此 $n>9$ 和 $n<-2$ 时 $y(n)=0$。

例 2.2

作为另外一个实例，假设给定 $0\leqslant n<\infty$ 范围内的输入序列 $x(n)$ 和单位冲激响应 $h(n)$。则对于每个 n 值，由式（2.5）给定的输出 $y(n)$ 可以由如下所示的计算得到：

$$
\begin{aligned}
&y(0)=x(0)h(0)\\
&y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)\\
&y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)\\
&y(3)=x(0)h(3)+x(1)h(2)+x(2)h(1)+x(3)h(0)\\
&y(4)=x(0)h(4)+x(1)h(3)+x(2)h(2)+x(3)h(1)+x(4)h(0)\\
&\vdots\\
&y(n)=x(0)h(n)+x(1)h(n-1)+x(2)h(n-2)+x(3)h(n-3)+\cdots+x(n)h(0)\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

有趣的是要注意下面的模式。在表达式中对于上述输出 $y(n)$ 的每个值，我们将 $x(0)$、$x(1)$、$x(2)$、…和 $h(n)$、$h(n-1)$、$h(n-2)$、…逐项按顺序相乘

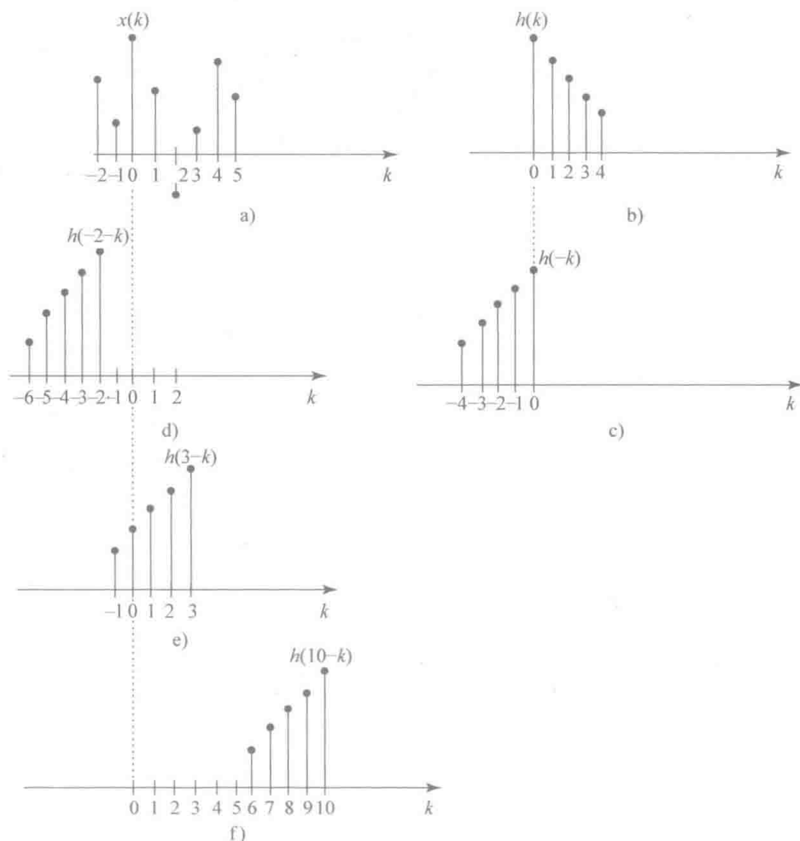


图 2.4　卷积和解释

并累加到乘积中，而每个乘积中两个采样的指数和总是 n。

卷积是由数字信号处理器硬件实现的基本操作并由软件对数字信号进行处理。数字信号处理器的设计和开发出的实现卷积和的数字信号处理器软件提供了非常有效和强大的工具。在 2.5 节中，将再次讨论这个话题，随后学习 z 变换的理论和应用。

2.2　z 变换理论

2.2.1　定义

在许多教材中，将序列 $x(n)$ 的 z 变换简单地定义为

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{2.8}$$

逆 z 变换定义为

$$Z^{-1}[X(z)] = x(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{n-1}dz \tag{2.9}$$

方程（2.8）表示 $-\infty < n < \infty$ 范围内序列 $x(n)$ 的双边 z 变换。由式（2.9）给定的逆 z 变换通过复 z 平面中的积分得到，z 平面中的积分超出了本书的范围。

我们更愿意考虑在数字信号处理中感兴趣的信号，因此考虑以固定采样周期 T 对连续时间信号进行采样获得的序列（其中 T 为采样周期），并生成数字序列 $x(nT)$。应该记得，根据筛选定理，有 $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ 。使用这个结果通过将 $x(t)$ 与冲激序列 $p(t)$ 相乘实现所谓的冲激采样过程，冲激串 $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$。因此，考虑用采样连续时间信号值加权而不是用一系列数加权后的序列。这样做，我们将离散序列表示为连续变量 t 的函数，它允许以数学的方式对信号进行处理。乘积表示为

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \end{aligned} \tag{2.10}$$

这个表达式具有拉普拉斯变换，表示为

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \tag{2.11}$$

现在使用频率变换 $e^{sT}=z$（其中 z 是复变量），并在式（2.11）中对其进行替换，得到

$$X^*(s)\big|_{e^{sT}=z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

因为 T 是一个常数，考虑采样 $x(nT)$ 是 n 的函数，并得到 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X^*(s)\big|_{e^{sT}=z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{2.12}$$

虽然式（2.8）给出的离散序列的第一种定义没有任何信号概念，例如频率响应和时域响应的概念会在分析离散时间系统和信号处理中使用。z 变换的推导开始于利用冲激函数对其采样的连续时间信号，引入变换 $e^{sT}=z$ 可得到相同的定义。在第 3 章中，将详细地研究这一转换的含义并得到对连续时间系统的频率响应和离散时间系统频率响应之间关系的基本理解。注意，在本书中仅考虑由式（2.12）定义的单边 z 变换，因此将下限索引指数设置为$n=0$。

例 2.3

让我们推导一些熟悉的离散时间序列的 z 变换。考虑单位脉冲

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases}$$

在 $\delta(n)$ 的 z 变换中仅有 $n=0$ 的一项。因此，$Z[\delta(n)]=1$。

例 2.4

考虑单位采样序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\0 & n<0\end{cases} \tag{2.13}$$

由 z 变换的定义，得到

$$Z[u(n)]=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots \tag{2.14}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n} \tag{2.15}$$

仅当 $|z^{-1}|<1$ 或 $|z|>1$ 时，这是一个无穷级数收敛的封闭表达式，如式（2.16）。这表示该区域在 z 平面的单位圆之外，称之为收敛域（ROC）。这意味着，封闭表达式仅对该区域内的 z 值存在。

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \tag{2.16}$$

很显然，对于 $\delta(n)$ 的 z 变换，其收敛域是整个 z 平面。

例 2.5

令 $x(n)=\alpha^{n}u(n)$，其中 α 通常假定为一复数。由 z 变换的定义，得到

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^{n} \tag{2.17}$$

当 $|\alpha z^{-1}|<1$，即当 $|z|>|\alpha|$ 时，这个幂级数收敛于式（2.18）。这表明，幂级数的收敛域在半径为 $R=|\alpha|$ [㊀] 的圆外。了解收敛域是非常重要的，在该区域内无限长序列 z 变换的封闭表达式是有效的[㊁]。

$$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}=\frac{z}{z-\alpha} \tag{2.18}$$

例 2.6

让我们考虑另一个实例，$x(n)=e^{j\theta n}u(n)$，这是一个复数序列。它的 z 变换为：

㊀ 原书为 $R=\alpha$，有误。——译者注

㊁ 我们可知非因果序列 $f(n)=-\alpha^{n}u(-n-1)$ 的 z 变换为 $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{n}z^{-n}$，也可表示为 $z/(z-\alpha)$，与式（2.18）中 $X(z)$ 相同，但是其收敛域为 $|z|<\alpha$。因此一个函数的逆 z 变换不是唯一的，只有我们知道其收敛域时，一个函数的逆 z 变换才唯一。

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\theta n} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{j\theta} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j\theta}} \tag{2.19}$$

其收敛域在 z 平面上的单位圆之外：$|z| > 1$。

例 2.7

给定序列 $x(n) = r^n \cos(\theta n) u(n)$，其中 $0 < r \leqslant 1$。为了推导它的 z 变换，将其表达为如下形式：

$$\begin{aligned} x(n) &= r^n \left[\frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2}\right] u(n) \\ &= \left[\frac{r^n e^{j\theta n}}{2} + \frac{r^n e^{-j\theta n}}{2}\right] u(n) \\ &= \frac{(re^{j\theta})^n}{2} u(n) + \frac{(re^{-j\theta})^n}{2} u(n) \end{aligned} \tag{2.20}$$

现在可以使用以前的结果得到 $x(n) = r^n \cos(\theta n) u(n)$ 的 z 变换：

$$X(z) = \frac{z[z - r\cos(\theta)]}{z^2 - [2r\cos(\theta)]z + r^2} \tag{2.21}$$

其收敛域为 $|z| > r$。当然，如果给定序列为 $x(n) = e^{-an}\cos(\omega_0 n) u(n)$，则在式（2.21）中简单地将 r 替代为 e^{-a} 得到 $x(n)$ 的 z 变换。常用离散时间序列 z 变换的列表是很有用的，它们在表 2.1 中列出。了解 z 变换的特性也是很有用的，可以用于生成更多的 z 变换并添加到表 2.1 中，如下面的实例所示。

表 2.1　z 变换对的列表

	$x(n)$，当 $n \geqslant 0$ 时	$X(z)$
1	$\delta(n)$	1
2	$\delta(n-m)$	z^{-m}
3	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$au(n)$	$\frac{az}{z-1}$
5	a^n	$\frac{z}{z-a}$
6	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
7	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
8	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
9	$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
10	$\frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$

（续）

	$x(n)$，当 $n \geqslant 0$ 时	$X(z)$
11	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+2)}{(m-1)!}a^{n-m+1}$	$\frac{z}{(z-a)^m}$
12	$r^n e^{j\theta n}$	$\frac{z}{z-re^{j\theta}}$
13	$r^n \cos(\theta n)$	$\frac{z[z-r\cos(\theta)]}{z^2-[2r\cos(\theta)]z+r^2}$
14	$r^n \sin(\theta n)$	$\frac{rz\sin(\theta)}{z^2-[2r\cos(\theta)]z+r^2}$
15	$e^{-\alpha n}\cos(\theta n)$	$\frac{z[z-e^{-\alpha}\cos(\theta)]}{z^2-[2e^{-\alpha}\cos(\theta)]z+e^{-2\alpha}}$

性质 2.1：微分　如果 $X(z)$ 是 $x(n)u(n)$ 的 z 变换，则 $-z(\mathrm{d}X(z))/\mathrm{d}z$ 就是 $nx(n)u(n)$ 的 z 变换。将该特性表示为

$$nx(n)u(n) \Leftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \tag{2.22}$$

证明：$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$。对 z 进行双边求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)[-nz^{-n-1}] = -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} nx(n)z^{-n}$$

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} nx(n)z^{-n} = Z[nx(n)u(n)]$$

现在考虑由式（2.18）给定的 z 变换，并将其也列在表 2.1 中：

$$x(n) = a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a} = X(z) \tag{2.23}$$

递归地使用这一求导特性，可以得到

$$na^n u(n) \Leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2} \tag{2.24}$$

和

$$n^2 a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} \tag{2.25}$$

从这些结果中可以发现，$(1/2)(n+1)(n+2)a^n u(n) = (1/2)(n^2+3n+2)a^n u(n)$ 的 z 变换如下：

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{z^3}{(z-a)^3} \tag{2.26}$$

由式（2.26）给定的变换对是对表 2.1 的补充。实际上，可以使用式（2.22）发现 $n^3a^nu(n)$，$n^4a^nu(n)$，…的 z 变换，并随后就可以找到式（2.27）的 z 变换并将其添加到表 2.1 中。

$$\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)a^n u(n)$$

$$\frac{1}{4!}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)a^n u(n) \tag{2.27}$$

$$\vdots$$

z 变换的特性对于推导新序列的 z 变换是有用的。当给定输入函数和初始条件时，对于求解线性差分方程和寻找离散时间系统的响应，z 变换的特性也是很重要的。和在许多教材中做的一样，我们逐一推导一个或两个特性并立即展示其应用，而不是一个接一个地推导所有特性。

性质 2.2：时延　令 $x(n)u(n)$ 的 z 变换为 $x(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+\cdots$。

则 $x(n-1)u(n-1)$ 的 z 变换为 $z^{-1}X(z)+x(-1)$：

$$x(n-1)u(n-1)\Leftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1) \tag{2.28}$$

证明：将 $x(n)u(n)$ 右移或时延一个采样得到 $x(n-1)u(n-1)$ 序列。如果 $n=-1$处存在 $x(-1)$，它将移动到 $n=0$ 的位置。因此，延迟序列的 z 变换由下式给定：

$$\begin{aligned}&x(-1)+x(0)z^{-1}+x(1)z^{-2}+x(2)z^{-3}+\cdots\\&=x(-1)+z^{-1}[x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots]\\&=x(-1)+z^{-1}X(z)\end{aligned}$$

重复应用这一特性，推导得出，

$$x(n-2)u(n-2)\Leftrightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2) \tag{2.29}$$

$$x(n-3)u(n-3)\Leftrightarrow z^{-3}X(z)+z^{-2}x(-1)+z^{-1}x(-2)+x(-3) \tag{2.30}$$

$$x(n-m)u(n-m)\Leftrightarrow z^{-m}X(z)^{㊀}+z^{-m+1}x(-1)+z^{-m+2}x(-2)+\cdots+x(-m)$$

或

$$x(n-m)u(n-m)\Leftrightarrow z^{-m}X(z)+\sum_{n=0}^{m-1}x(n-m)z^{-n} \tag{2.31}$$

如果初始条件为零，有更简单的关系：

$$x(n-m)u(n-m)\Leftrightarrow z^{-m}X(z) \tag{2.32}$$

例 2.8

考虑一个使用上述结果求解一阶线性差分方程的实例。我们有

$$y(n)-0.5y(n-1)=5x(n-1) \tag{2.33}$$

其中

㊀ 原书为 $x(z^{-1})$，有误。——译者注

$$x(n)=(0.2)^n u(n)$$
$$y(-1)=2$$

令$Z[y(n)]=Y(z)$。因为$x(n)=0(-\infty<n<0)$，由式（2.28），有$z[y(n-1)]=z^{-1}Y(z)+y(-1)$和$z[x(n-1)]=z^{-1}X(z)+x(-1)$，其中$X(z)=z/(z-0.2)$，$x(-1)=0$。替换这些结果，得到

$$Y(z)-0.5[z^{-1}Y(z)+y(-1)]=5[z^{-1}X(z)+x(-1)]$$
$$Y(z)-0.5[z^{-1}Y(z)+y(-1)]=5z^{-1}X(z)$$
$$Y(z)(1-0.5z^{-1})=0.5y(-1)+5z^{-1}X(z) \tag{2.34}$$
$$Y(z)=\frac{0.5y(-1)}{(1-0.5z^{-1})}+\frac{5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})}X(z)$$
$$Y(z)=\frac{0.5y(-1)z}{(z-0.5)}+\frac{5}{(z-0.5)}X(z)$$

在最后一个表达式中，用$y(-1)=2$和$X(z)=z/(z-0.2)$进行替换，得到

$$Y(z)=\frac{z}{z-0.5}+\frac{5z}{(z-0.5)(z-0.2)} \tag{2.35}$$
$$=Y_{0i}(z)+Y_{0s}(z) \tag{2.36}$$

如下所述，其中，$Y_{0i}(z)$是零输入响应的z变换，$Y_{0s}(z)$是零状态响应的z变换，解释如下。

现在，需要找到式（2.35）右边两项的逆z变换。第一项$Y_{0i}(z)=z/(z-0.5)$的逆z变换很容易找到，$y_{0i}(n)=(0.5)^n u(n)$。不是使用式（2.9）中给定的复积分寻找第二项的逆z变换，而采取与在求解差分方程中借助于拉普拉斯变换同样的方法，即将$Y_{0s}(z)$分解为部分分式形式来获得每一项的逆z变换。已经推导得到$Ra^n u(n)$的z变换为$Rz/(z-a)$，很容易写出该项的逆z变换为$R_k z/(z-a_k)$。因此，应该将第二项扩展为如下形式：

$$Y_{0s}(z)=\frac{R_1 z}{z-0.5}+\frac{R_2 z}{z-0.2} \tag{2.37}$$

对熟知的部分分式展开方法稍加修改，将$Y_{0s}(z)$除以z，得到

$$\frac{Y_{0s}(z)}{z}=\frac{5}{(z-0.5)(z-0.2)}=\frac{R_1}{z-0.5}+\frac{R_2}{z-0.2}$$

现在使用常规程序可以很容易地找到余数R_1和R_2：

$$R_1=\frac{Y_{0s}(z)}{z}(z-0.5)\bigg|_{z=0.5}=\frac{5}{z-0.2}\bigg|_{z=0.5}=16.666$$
$$R_2=\frac{Y_{0s}(z)}{z}(z-0.2)\bigg|_{z=0.2}=\frac{5}{z-0.5}\bigg|_{z=0.2}=-16.666$$

因此

$$\frac{Y_{0s}(z)}{z}=\frac{5}{(z-0.5)(z-0.2)}=\frac{16.666}{z-0.5}-\frac{16.666}{z-0.2}$$

两边都乘以 z，得到

$$Y_{0s}(z)=\frac{16.666z}{z-0.5}-\frac{16.666z}{z-0.2} \tag{2.38}$$

现在可以得到逆 z 变换 $y_{0s}(n)=16.666[(0.5)^n-(0.2)^n]u(n)$。因此，满足给定差分方程的总输出为

$$\begin{aligned} y(n)&=y_{0i}(n)+y_{0s}(n)=\{(0.5)^n+16.666[(0.5)^n-(0.2)^n]\}u(n)\\ &=\{17.666(0.5)^n-16.666(0.2)^n\}u(n)^{㊀} \end{aligned}$$

因此，为寻找任意函数 $F(z)$ 的逆 z 变换，对部分分式程序进行的修改是将函数 $F(z)$ 除以 z，将 $F(z)/z$ 展开为它的常规部分分式形式，然后每一项都乘以 z 得到 $\sum_{k=1} R_k z/(z-a_k)$ 形式的 $F(z)$。由这种形式，得到逆 z 变换 $f(n)$ 为

$$\sum_{k=1} R_k(a_k)^n u(n)$$

然而，有一种替换方法是展开以这种形式表达的变换函数，当它仅有单极点时

$$H(z^{-1})=\frac{N(z^{-1})}{\prod_{k=1}(1-a_k z^{-1})}$$

其部分分式形式为

$$H(z^{-1})=\sum_{k=1}\frac{R_k}{(1-a_k z^{-1})} \tag{2.39}$$

$$R_k=H(z^{-1})(1-a_k z^{-1})\big|_{z=a_k}$$

则逆 z 变换是式（2.39）中所有项的逆 z 变换之和：$\sum_{k=1}^{K} R_k(a_k)^n u(n)$。我们更喜欢第一种方法，因为我们已经熟悉 $H(s)$ 的部分分式展开，并且知道当它在 s 平面上有多极点时如何寻找余数。这种方法将由下面几页中的几个实例进行图解。

2.2.2 零输入和零状态响应

在 2.2.1 节中，得到 $y(n)$ 的总输出为 $y_{0i}(n)=(0.5)^n u(n)$ 和 $y_{0s}(n)=16.666[(0.5)^n-(0.2)^n]$ 两个输出的和。

如果输入函数 $x(n)$ 为零，则 $X(z)=0$，并且式（2.34）中的 $Y(z)$㊁将仅包含 $Y_{0i}(z)=0.5y(-1)z/(z-0.5)=z/(z-0.5)$ 项；因此，当输入为零时，响应 $y(n)$ 为 $(0.5)^n u(n)$。当系统输入假定为零时，由线性差分方程描述的系统响应称为零输入响应，它仅取决于给定的初始条件。由差分方程指定的初始条件称为初始状态更好（但状态术语在线性离散时间系统理论中有特定的定义，初始状态

㊀ 17.6666 应为 17.666，原书有误。——译者注

㊁ 原书为 $Y(s)$，有误。——译者注

的术语和这个定义是一致的)。假定上述问题中的初始状态$y(-1)$为零时，总响应$Y(z)$的z变换仅包含$Y_{0s}(z)=5/(z-0.5)X(z)=5/[(z-0.5)(z-0.2)]$项，它给出了响应$y_{0s}(n)=16.666[(0.5)^n-(0.2)^n]$。当初始条件或初始状态为零时，这就是响应$y(n)$，因此它被称为零状态响应。零状态响应是仅由输入引起的响应，零输入响应是仅由初始状态（或初始条件）引起的响应。重复这一点是为了避免在学生中产生普遍的混淆！通过忽略输入函数并计算仅由初始状态引起的响应来计算零输入响应，通过忽略初始状态（如果给定）并计算仅由输入函数引起的响应来计算零状态响应。建议学生了解零输入响应和零状态响应的准确定义和含义，不要产生这两个术语之间的任何混淆。

2.2.3 系统的线性

如果由式（2.33）描述的离散时间系统的输入$x(n)$乘以一个常数，如$K=10$，系统的总响应$y(n)$给定为$y_{0i}(n)+10y_{0s}(n)$，它不是总响应$y_{0i}(n)+y_{0s}(n)$的10倍。这可能会导致不正确的推理，即由上述差分方程（2.33）描述的系统不是线性的。测试系统是否线性的正确方法是如下所述将测试仅应用于零状态响应或零输入响应。

当系统的输入是$x_1(n)$时，令由差分方程定义的系统零状态响应为$y_1(n)$，当系统的输入是$x_2(n)$时，零状态响应为$y_2(n)$，其中输入是任意的。在此强调的是，定义应当仅适用于零状态响应或零输入响应。因此，2.1节中给出的线性系统的定义重复如下，强调定义应当仅应用于零输入响应或零状态响应。

给定系统$x(n)\Rightarrow y(n)$，如果$Kx(n)\Rightarrow Ky(n)$，并且$K_1x_1(n)+K_2x_2(n)\Rightarrow K_1y_1(n)+K_2y_2(n)$，则系统是线性的，这里假设$y(n)$是由输入信号$x(n)$引起的零状态响应或由初始条件引起的零输入响应。现在应该很容易验证，由式（2.33）描述的系统是线性系统。

2.2.4 时不变系统

由线性差分方程的一般形式（2.3）定义的离散时间系统定义了系统的输入输出关系。当输入为$x(n)$时，将这个方程的解表示为输出$y(n)$。当输入是$x(n-N)$时，如果输出是$y(n-N)$，这样的系统被称为时不变系统，这意味着如果输入序列延迟n个采样，输出也延迟n个采样。因此，时不变离散时间系统也称为位移不变系统。再由之前对系统线性的讨论中应该显而易见地看出，当上述对系统的测试是应用于时不变系统时，输出$y(n)$和$y(n-N)$必须仅被选定为零状态响应或零输入响应。

2.3 使用z变换求解差分方程

将考虑几个更多的实例来展示在本节中如何使用z变换来求解线性位移不变

差分方程，稍后将展示如何使用经典方法来求解单输入、单输出的差分方程。学生们应当熟悉，当函数有单极点、多极点或一对复共轭极点时将复变量的本征、有理函数分解为其部分分式形式。复变量有理函数是两个实系数多项式之间的比值，本征函数是一个分子多项式的阶数小于分母多项式阶数的函数。连续时间系统传递函数 $H(s)$ 中分子的阶数最多等于其分母的阶数。相反，需要指出的是，以变量 z^{-1} 项表示的离散时间系统的传递函数不需要是本征函数。例如，考虑下面带有复变量 z^{-1} 的非本征函数的实例：

$$H(z^{-1})=\frac{z^{-4}-0.8z^{-3}-2.2z^{-2}-0.4z^{-1}}{z^{-2}-z^{-1}+2.0} \tag{2.40}$$

在这个方程中，两个多项式的系数按 z^{-1} 的降幂排列，当对分子除以分母进行长除直到余式是一个阶数小于分母阶数的多项式为止，得到商（$z^{-2}+0.2z^{-1}-4.0$）和余式（$-4.8z^{-1}+8.0$）：

$$H(z^{-1})=z^{-2}+0.2z^{-1}-4.0+\frac{-4.8z^{-1}+8.0}{z^{-2}-z^{-1}+2.0} \tag{2.41}$$

$$=z^{-2}+0.2z^{-1}-4.0+H_1(z^{-1}) \tag{2.42}$$

因为 z^{-m} 的逆 z 变换是 $\delta(n-m)$，得到前三项的逆 z 变换为 $\delta(n-2)+0.2\delta(n-1)-4.0\delta(n)$，将其添加到下面将要推导的 $H_1(z^{-1})$ 的逆 z 变换中。

例 2.9：复共轭极点

选择式（2.41）右边的第二项作为带有复极点的传递函数的实例：

$$H_1(z^{-1})=\frac{-4.8z^{-1}+8.0}{z^{-2}-z^{-1}+2.0}$$

分子和分母同乘以 z^2，对分母进行因式分解，发现 $H_1(z^{-1})$ 在 $0.25\pm j0.6614$ 上具有一双复共轭极点：

$$\begin{aligned}H_1(z)&=\frac{8(z^2-0.6z)}{2z^2-z+1}\\&=\frac{8(z^2-0.6z)}{2(z^2-0.5z+0.5)}\\&=4\frac{z^2-0.6z}{(z-0.25-j0.6614)(z-0.25+j0.6614)}\end{aligned}$$

将 $H_1(z)/z$ 扩展为其修改后的部分分式形式：

$$\frac{H_1(z)}{z}=\frac{2+j1.0583}{z-0.25-j0.6614}+\frac{2-j1.0583}{z-0.25+j0.6614}$$

这种形式能够更好地表示余式和指数形式的极点，随后，乘以 z 得到

$$H_1(z)=\frac{(2.2627e^{j0.4867})z}{z-0.7071e^{j1.209}}+\frac{(2.2627e^{-j0.4867})z}{z-0.7071e^{-j1.209}}$$

$H_1(z)$ 的逆 z 变换通过下式得到：

$$h_1(n)=[(2.2627e^{j0.4867})(0.7071e^{j1.209})^n$$

$$
\begin{aligned}
&+(2.2627e^{-j0.4867})(0.7071e^{-j1.209})^n]u(n)\\
&=[2.2627(0.7071)^n e^{j1.209n}e^{j0.4867}\\
&\quad +2.2627(0.7071)^n e^{-j1.209n}e^{-j0.4867}]u(n)\\
&=2.2627(0.7071)^n[e^{j(1.209n+0.4867)}+e^{-j(1.209n+0.4867)}]u(n)\\
&=2.2627(0.7071)^n[2\cos(1.209n+0.4867)]u(n)\\
&=4.5254(0.7071)^n[\cos(1.209n+0.4867)]u(n)
\end{aligned}
$$

添加这些项，得到逆 z 变换为

$$
H(z^{-1})=z^{-2}+0.2z^{-1}-4.0+\frac{(2.2627e^{j0.4867})z}{z-0.7071e^{j1.209}}+\frac{(2.2627e^{-j0.4867})z}{z-0.7071e^{-j1.209}}
$$

$$
\begin{aligned}
h(n)&=\delta(n-2)+0.2\delta(n-1)-4.0\delta(n)+2.2627e^{j0.4867}(0.7071e^{j1.209})^n\\
&\quad +2.2627e^{j-0.4867}(0.7071e^{-j1.209})^n u(n)\\
&=\delta(n-2)+0.2\delta(n-1)-4.0\delta(n)+2.2627(0.7071)^n\\
&\quad \times[e^{j(1.209n+0.4867)}+e^{-j(1.209n+0.4867)}]u(n)\\
&=\delta(n-2)+0.2\delta(n-1)-4.0\delta(n)+2.2627(0.7071)^n\\
&\quad \times[2\cos(1.209n+0.4867)]u(n)\\
&=\delta(n-2)+0.2\delta(n-1)-4.0\delta(n)\\
&\quad +4.5254(0.7071)^n[\cos(1.209n+0.4867)]u(n)
\end{aligned}
$$

注意，这样的解是用弧度表示的。

例 2.10

考虑一个以下列二阶线性移位不变差分方程描述的离散时间系统：

$$
y(n)=0.3y(n-1)-0.02y(n-2)+x(n)-0.1x(n-1)
$$

其中

$$
x(n)=(-0.2)^n u(n)
$$
$$
y(-1)=1.0
$$
$$
y(-2)=0.6
$$

对这个差分方程中的每一项使用 z 变换，得到

$$
\begin{aligned}
Y(z)&=0.3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-0.02[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]\\
&\quad +X(z)-0.1[z^{-1}X(z)+x(-1)]
\end{aligned}
$$

我们知道，$X(z)=z/(z+0.2)$ 和 $x(-1)=0$。替换这些项和给定的初始状态，得到

$$
\begin{aligned}
Y(z)[1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}]&=[0.3y(-1)-0.02z^{-1}y(-1)-0.02y(-2)]\\
&\quad +X(z)[1-0.1z^{-1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(z)&=\frac{[0.3y(-1)-0.02z^{-1}y(-1)-0.02y(-2)]}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}\\
&\quad +\frac{X(z)(1-0.1z^{-1})}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}
\end{aligned}
$$

当输入 $x(n)$ 为零时，$X(z)=0$；因此右边的第二项为零，仅留下由给定初始条件引起的第一项。它是零输入响应 $y_{0i}(n)$ 的 z 变换。

右边第一项的逆 z 变换

$$Y_{0i}(z)=\frac{[0.3y(-1)-0.02z^{-1}y(-1)-0.02y(-2)]}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}$$

给出了输入为零时的响应，因此，这是零输入响应 $y_{0i}(n)$。$Y_{0s}(z)$ 的逆 z 变换

$$\frac{X(z)[1-0.1z^{-1}]}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}=Y_{0s}(z)$$

给出了初始条件（也称为初始状态）为零时的响应，因此，这是零状态响应 $y_{0s}(n)$。

替换初始状态的值及 $X(z)$，得到

$$Y_{0i}(z)=\frac{0.288-0.02z^{-1}}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}=\frac{0.288z^2-0.02z}{z^2-0.3z+0.02}=\frac{z[0.288z-0.02]}{(z-0.1)(z-0.2)}$$

和

$$Y_{0s}(z)=\frac{X(z)(1-0.1z^{-1})}{1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}=\left(\frac{z}{z+0.2}\right)\frac{(1-0.1z^{-1})}{(1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2})}$$

$$=\frac{z(z^2-0.1z)}{(z+0.2)(z^2-0.3z+0.02)}=\frac{z^2(z-0.1)}{(z+0.2)(z-0.1)(z-0.2)}$$

需要注意的是，右边第二项 $z=0.1$ 处有相互抵消的一个极点和一个零点，$Y_{0s}(z)$ 化简为 $z^2/[(z+0.2)(z-0.2)]$。对 $Y_{0i}(z)$ 除以 z，将其扩展为标准的部分分式形式

$$\frac{Y_{0i}(z)}{z}=\frac{0.288z-0.02}{(z-0.1)(z-0.2)}=\frac{0.376}{z-0.2}-\frac{0.088}{z-0.1}$$

乘以 z 得到

$$Y_{0i}(z)=\frac{0.376z}{z-0.2}-\frac{0.088z}{z-0.1}$$

类似地，将 $Y_{0s}(z)/z=z/[(z+0.2)(z-0.2)]$ 扩展为 $-0.5/(z+0.2)+0.5/(z-0.2)$ 形式，得到

$$Y_{0s}(z)=\frac{z^2}{(z+0.2)(z-0.2)}=\frac{-0.5z}{z+0.2}+\frac{0.5z}{z-0.2}$$

因此，零输入响应是 $y_{0i}(n)=[0.376(0.2)^n-0.088(0.1)^n]u(n)$，零状态响应是 $y_{0s}(n)=0.5[-(-0.2)^n+(0.2)^n]u(n)$。

例 2.11：多极点

在此讨论具有多个极点的函数的情况并将其扩展为部分分式形式。令

$$\frac{G(z)}{z}=\frac{N(z)}{(z-z_0)^r(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_m)}$$

其标准的部分分式形式为

$$\frac{G(z)}{z}=\frac{C_0}{(z-z_0)^r}+\frac{C_1}{(z-z_0)^{r-1}}+\cdots+\frac{C_{r-1}}{z-z_0}+\frac{k_1}{z-z_1}+\frac{k_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{k_m}{z-z_m}$$

通过对 $G(z)/z$ 乘以 $(z-z_i)$，$i=1, 2, 3, \cdots, m$，并求出 $z=z_i$ 处乘积的常规方法获得 z_1，z_2，…单极点上的余数 k_1，k_2，…，k_m。余数 C_0 也可以用同样的方法得到

$$C_0=\left[(z-z_0)^r\frac{G(z)}{z}\right]\bigg|_{z=z_0}$$

系数 C_1 由下式得到

$$\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^r\frac{G(z)}{z}\right]\bigg|_{z=z_0}$$

系数 C_2 由下式得到

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_0)^r\frac{G(z)}{z}\right]\bigg|_{z=z_0}$$

得到系数 C_j，$j=1, 2, 3, \cdots, (r-1)$ 的一般公式为

$$C_j=\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\left[(z-z_0)^r\frac{G(z)}{z}\right]\bigg|_{z=z_0} \tag{2.43}$$

得到余数和系数后，对展开式乘以 z：

$$G(z)=\frac{C_0z}{(z-z_0)^r}+\frac{C_1z}{(z-z_0)^{r-1}}+\cdots+\frac{C_{r-1}z}{z-z_0}+\frac{k_1z}{z-z_1}+\frac{k_2z}{z-z_2}+\cdots+\frac{k_mz}{z-z_m}$$

随后，使用表 2.1 中给出的 z 变换对找到每一项的逆 z 变换得到 $g(n)$。为了说明这个方法，考虑函数 $G(z)$，它在 $z=1$ 处具有单个极点，在 $z=2$ 处具有三个极点：

$$G(z)=\frac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

$$\frac{G(z)}{z}=\frac{2z^2-11z+12}{(z-1)(z-2)^3}=\frac{C_0}{(z-2)^3}+\frac{C_1}{(z-2)^2}+\frac{C_2}{z-2}+\frac{k}{z-1} \tag{2.44}$$

$$k=\frac{2z^2-11z+12}{(z-2)^3}\bigg|_{z=1}=-3$$

$$C_0 = \frac{2z^2 - 11z + 12}{z - 1}\bigg|_{z=2} = -2$$

$$C_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)}\bigg|_{z=2} = \frac{2z^2 - 4z - 1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=2} = -1$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)}\bigg|_{z=2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{2z^2 - 4z - 1}{(z-1)^2}\right]\bigg|_{z=2} = 3$$

因此，有

$$G(z) = \frac{-2z}{(z-2)^3} + \frac{-z}{(z-2)^2} + \frac{3z}{z-2} + \frac{-3z}{z-1} \tag{2.45}$$

现在需要注意的是，可以容易地从表 2.1 中得到 $az/(z-a)^2$ 的逆 z 变换是 $na^n u(n)$。现在要将 $-z/(z-2)^2$ 项化简为 $-(1/2)2z/(z-2)^2$ 以便将其逆 z 变换正确地写为 $-(1/2)n2^n u(n)$。从表 2.1 变换对 6 中，得到 $z/(z-a)^3$ 的逆 z 变换是 $n(n-1)/2!\ a^{n-2}u(n)$。

因此，得到 $-2z/(z-2)^3$ 的逆 z 变换为

$$\frac{-2n(n-1)}{2!}(2)^{n-2}u(n) = \frac{-n(n-1)}{4}(2)^n u(n)$$

最后，得到 $G(z)$ 的逆 z 变换为

$$\left[\frac{-n(n-1)}{4}(2)^n - \frac{n}{2}(2)^n - 3(2)^n - 3\right]u(n)$$

2.3.1 z 变换的更多应用

在本节中，考虑图 2.5 所示的电路并通过 z 域中的方程对其进行建模，而不是通过时域中的方程（2.1）给定的等效模型。选择这个实例是为了说明对具有大量加法器并因此在 z 域引起了大量差分方程的离散时间系统如何进行分析。对方程式（2.1）中的每一项写 z 变换，得到

$$\begin{aligned}
Y_1(z) &= 0.3[z^{-1}Y_1(z) + y_1(-1)] - 0.2[z^{-2}Y_1(z) + z^{-1}y_1(-1) + y_1(-2)] \\
&\quad - 0.1z^{-1}X(z) \\
Y_2(z) &= Y_1(z) + 0.5[z^{-1}Y_1(z) + y_1(-1)] - 0.4[z^{-1}Y_2(z) + y_2(-1)] \\
Y_3(z) &= Y_2(z) + 0.6[z^{-1}Y_2(z) + y_2(-1)] + 0.8Y_1(z)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

注意，这些都是线性代数方程——三个未知函数 $Y_1(z)$、$Y_2(z)$ 和 $Y_3(z)$ 中的三个方程，其中初始状态和 $X(z)$ 是已知的。如下所示，重新排列这些方程后得到

$$\begin{aligned}
Y_1(z)(1 - 0.3z^{-1} + 0.2z^{-2}) &= 0.3y_1(-1) - 0.2z^{-1}y_1(-1) \\
&\quad + y_1(-2) - 0.1z^{-1}X(z) \\
Y_1(z)(-1 - 0.5z^{-1}) + Y_2(z)(1 + 0.4z^{-2}) &= 0.5y_1(-1) - 0.4y_2(-1)
\end{aligned}$$

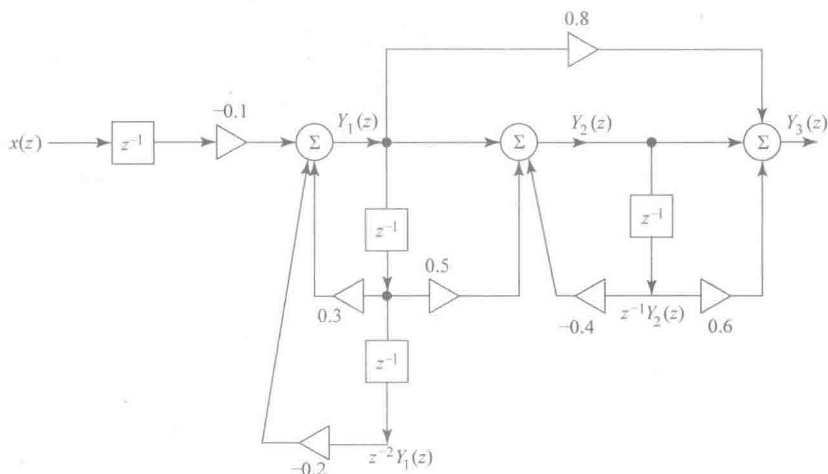


图 2.5　离散时间系统

$$0.8Y_1(z)+Y_2(z)(1+0.6z^{-1})-Y_3(z)=-0.6y_2(-1) \tag{2.47}$$

用矩阵形式将其表达为

$$\begin{bmatrix}(1-0.3z^{-1}+0.2z^{-2}) & 0 & 0\\ (-1-0.5z^{-1}) & (1+0.4z^{-2}) & 0\\ 0.8 & (1+0.6z^{-1}) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1(z)\\ Y_2(z)\\ Y_3(z)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.3y_1(-1)-0.2z^{-1}y_1(-1)+y_1(-2)-0.1z^{-1}X(z)\\ 0.5y_1(-1)-0.4y_2(-1)\\ -0.6y_2(-1)\end{bmatrix} \tag{2.48}$$

通过使用矩阵代数，当输入 $X(z)$ 为零时，可以得到任何一个或所有三个未知函数 $Y_1(z)$、$Y_2(z)$ 和 $Y_3(z)$——它们的逆 z 变换生成了零输入响应。当初始状态为零时，我们可以得到它们——其逆 z 变换将生成零状态响应。当然，可以得到给定初始状态和输入函数 $x(n)$ 下 $y_1(n)$、$y_2(n)$ 和 $y_3(n)$ 的总响应。这里概述了分析由离散时间域和 z 变换域中任意大量方程描述的离散时间系统的一种有效的代数方法。使用这种方法得到零输入响应和零状态响应及其和，表示为 $y_1(n)$、$y_2(n)$ 和 $y_3(n)$。

2.3.2　固有响应和强迫响应

需要指出的是，总响应也可以表示为系统的固有响应和强迫响应之和。首先明确的是固有响应不同于系统的零输入响应。固有响应定义为总响应的组成部分，它由显示了系统固有频率的所有项组成。固有频率也被称为系统的“特征根”、系统行列式的特征值和传递函数的极点。

有一些用来寻找系统固有频率的方法。假设系统由其单输入 - 输出关系描述

为 $a_0y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+\cdots+a_ny(n-N)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_mx(n-M)$。

如果假设齐次方程的解形如 $y_c(n)=A(c)^n$，并将其替代为其延迟序列，则得到下列特征方程：

$$A(c)^n[a_0+a_1(c)^{-1}+a_2(c)^{-2}+\cdots+a_N(c)^{-N}]$$
$$=A(c)^{n-N}[a_0(c)^N+a_1(c)^{N-1}+\cdots+a_{N-1}(c)+a_N]=0$$

令特征多项式的 N 个根

$$[a_0(c)^N+a_1(c)^{N-1}+\cdots+a_{N-1}(c)+a_N]$$

表示为（c_1），（c_2），…，（c_N），它们是固有频率。假设所有根是不同的，并且是分离的，固有响应假设形式

$$y_c(n)=A_1(c_1)^n+A_2(c_2)^n+\cdots+A_N(c_N)^n$$

在经典算法中被称为补函数或互补解。

然而，如果特征多项式具有带有 R 多重性的重根(c_r)，则在 $y_c(n)$ 中对应于这个固有频率 c_r 的 R 项假定为如下形式：

$$[B_0+B_1n+B_2n^2+\cdots+B_Rn^R](c_r)^n$$

假设由线性差分方程组描述的系统如式（2.47）所示。当解 $Y_1(z)$、$Y_2(z)$ 或 $Y_3(z)$时得到式（2.48）中显示的系统矩阵的行列式为 $Y_1(z)$、$Y_2(z)$和 $Y_3(z)$的分母。这个系统行列式的根是 z 变换 $Y_1(z)$、$Y_2(z)$、$Y_3(z)$的极点，出现在这些函数的部分分式扩展中。部分分式扩展中每一项的逆 z 变换将出现其相应的固有频率。包含固有频率的所有项构成了系统的固有响应。需要重点观察的是带有这些固有频率的项同时出现在零输入响应和零状态响应中；因此，带有固有频率 c_j 项的振幅 A_j 必须计算为在零输入和零状态响应中都能找到的带有固有频率 c_j 项的总和。由此可见，固有响应不同于零输入响应和，强迫响应不同于零状态响应。总响应中这些不同组成部分的计算必须通过使用这些项的正确定义来实现。

2.4 用经典方法求解差分方程

现在，已经描述了为通过 n 阶线性常系数差分方程描述的系统寻找补函数的方法，由于指定了输入函数，我们讨论特定函数的计算或特定的求解方案。注意，当仅有一个这样的方程时可以使用这个经典方法，当有很多描述给定离散时间系统的方程时不是很容易。另外，当特征多项式或系统行列式的阶数大于 3 时，通过分析方法寻找特征多项式或系统行列式的零点是不可能的。我们必须使用数值技术寻找这些零点，它们是系统的固有频率。如果当我们找到固有频率时，可以将固有响应确定为在上节中给定的函数 $y_c(n)$。接下来，必须选择特定函数的形式，它取决于输入函数或强制函数的形式。因此，它是强迫响应、固有

响应（余函数）和强迫响应（特定函数）的总和是总响应。选择的特定函数的形式在表2.2中列出。

表2.2　输入函数和强迫响应的形式

	强迫函数的输入	强迫响应
1	$A(\alpha)^n, \alpha \neq c_i (i=1,2,\cdots)$ [㊀]	$B(\alpha)^n$
2	$A(\alpha)^n, \alpha = c_i$	$[B_0 + B_1 n](\alpha)^n$
3	$A\cos(\omega_0 n + \theta)$	$B\cos(\omega_0 n + \phi)$
4	$(\sum_{i=0}^{m} A_i n^i)\alpha^n$	$(\sum_{i=0}^{m} B_i n^i)\alpha^n$

在非齐次差分方程中替代特定函数，并通过比较所得方程两边的系数，计算系数B或系数B_i。

接下来，将给定的初始条件应用于补函数和特定函数的和，其中有n个补函数的未知常量。当得到满足初始条件的这些常数时，替换它们就完成了总输出的求解方案。例2.12给出了求解差分方程的经典方法。

例2.12

使用经典方法求解下面给定的线性差分方程：

$$y(n) - 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = 2(0.1)^n \tag{2.49}$$

$$y(-1) = 1 \text{ 和 } y(-2) = 0 \tag{2.50}$$

特征多项式是$z^2 - 0.5z + 0.06 = (z-0.3)(z-0.2)$，它在$z_1 = 0.3$和$z_2 = 0.2$处有特征根。因为这是单个零点，因此补函数为$y_c(n) = A_1(0.3)^n + A_2(0.2)^n$。因为输入$x(n)$给定为$2(0.1)^n$，从表2.2中选择特定函数$y_p$使其变成$y_p(n) = B(0.1)^n$的形式。因此，我们替代$y_p(n-1) = B(0.1)^{n-1}$和$y_p(n-2) = B(0.1)^{n-2}$，得到

$$B(0.1)^n - 0.5B(0.1)^{n-1} + 0.06B(0.1)^{n-2} = 2(0.1)^n$$

$$B(0.1)^n - 0.5(10)B(0.1)^n + 0.06(100)B(0.1)^n = 2(0.1)^n$$

$$(1.0 - 5 + 6)B(0.1)^n = 2(0.1)^n$$

因此，$B=1$，特定函数$y_p(n) = (0.1)^n$。所以，总解为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_c(n) + y_p(n) \\ &= A_1(0.3)^n + A_2(0.2)^n + (0.1)^n \end{aligned}$$

将初始条件应用于这一总响应，得到

$$y(-1) = 3.3333A_1 + 5A_2 + 10 = 1$$

$$y(-2) = 11.111A_1 + 25A_2 + 100 = 0$$

求解这两个方程，得到$A_1 = 9.903$和$A_2 = -8.4$。所以，总响应为

$$y(n) = 9.903(0.3)^n - 8.4(0.2)^n + (0.1)^n$$

㊀ 原书为$\alpha = c_1 (i=1, 2, \cdots)$，有误。——译者注

例 2.13

重新考虑例 2.10。在这个实例中求得的零输入响应和零状态响应为

$$y_{0i}(n)=[0.376(0.2)^n-0.088(0.1)^n]u(n)$$

$$y_{0s}(n)=0.5[-(-0.2)^n+(0.2)^n]u(n)=[0.5(0.2)^n-0.5(-0.2)^n]u(n)$$

例 2.10 中给定系统的特征多项式容易被看作为 $(1-0.3z^{-1}+0.02z^{-2})$。对其乘以 z^2，我们找到$(z^2-0.3z+0.02)=(z-0.2)(z-0.1)$的零点作为固有频率是$(c_1)=(0.2)$和$(c_2)=(0.1)$。注意，零输入响应 $y_{0i}(n)$具有 $0.376(0.2)^nu(n)$项，它有固有频率为 0.2，$-0.088(0.1)^nu(n)$项具有固有频率（0.1），而零状态响应 $y_{0s}(n)$也包含带有固有频率（0.2）的项 $0.5(0.2)^nu(n)$。我们也注意到，$Y_{0s}(z)$在 $z=0.1$ 处的极点被 $z=0.1$ 处的零点抵消了。因此在零状态响应 $y_{0s}(n)$中没有带有固有频率（0.1）的项。所以包含固有频率（0.2）的项是和 $0.5(0.2)^nu(n)+0.376(0.2)^nu(n)=0.876(0.2)^nu(n)$，而带有固有频率（0.1）的另一项是 $-0.088(0.1)^nu(n)$。因此，系统的固有响应是 $0.876(0.2)^nu(n)-0.088(0.1)^nu(n)$。

剩下的一项 $-0.5(-0.2)^nu(n)$是频率（-0.2）的强迫响应，它可以在强迫函数或输入函数 $x(n)=(-0.2)^nu(n)$中找到。因此，系统总响应现在可以表示为其固有响应 $0.876(0.2)^nu(n)-0.2(0.1)^nu(n)$和强迫响应 $-0.5(-0.2)^nu(n)$的总和。需要重复的是，在零状态响应中除了带有输入频率的项之外是带有系统固有频率的项；因此，零输入响应等于固有响应或零状态响应等于强迫响应这种表述是错误的。

例 2.14

另外一个例子，让我们分析如图 2.6 所示的离散时间系统模型。假设初始状态为零，得到两个加法器的输出方程为

$$y_1(n)=x(n-1)-0.2y_1(n-1)-0.4y_1(n-2)$$

$$y_2(n)=2y_1(n-1)-0.1y_2(n-1)$$

当离散时间系统由如上几个线性差分方程描述时，很难得到单输入、单输出方程。

因此，使用递归算法或经典方法求解输出是不可能的。但是，可以将差分方程变换为其等效的 z 变换方程。它们变成了可以使用矩阵代数求解以找到输出 z 变换的线性代数方程。输出函数的逆 z 变换在时间域给了最终的求解方案。所以它是时域分析中更有效的 z 变换方法。为了说明这个方法，在时域中对上述两个方程进行变换，得到

$$Y_1(z)=z^{-1}X(z)-0.2z^{-1}Y_1(z)-0.4z^{-2}Y_1(z)$$

$$Y_2(z)=2z^{-1}Y_1(z)-0.1z^{-1}Y_2(z)$$

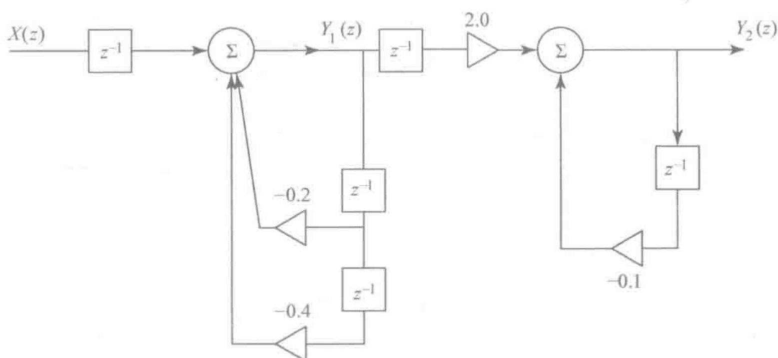


图 2.6　一个离散时间系统的实例

将这些方程重新排列为如下形式：

$$Y_1(z)(1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2})+Y_2(z)(0)=z^{-1}X(z)$$

$$Y_1(z)(-2z^{-1})+Y_2(z)(1+0.1z^{-1})=0$$

并在矩阵方程中将其表达为

$$\begin{bmatrix}(1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}) & 0\\ -2z^{-1} & (1+0.1z^{-1})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1(z)\\ Y_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z^{-1}X(z)\\ 0\end{bmatrix}$$

根据克莱姆法则，找到输出 $y_2(n)$ 的 z 变换：

$$Y_2(z)=\frac{\left\|\begin{matrix}(1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}) & z^{-1}X(z)\\ -2z^{-1} & 0\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}(1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}) & 0\\ -2z^{-1} & (1+0.1z^{-1})\end{matrix}\right\|}$$

$$=\left[\frac{2z^{-2}}{1+0.3z^{-1}+0.42z^{-2}+0.04z^{-3}}\right]X(z)$$

$$=\left[\frac{2z}{z^3+0.3z^2+0.42z+0.04}\right]X(z)$$

当代换上述给定输入的 z 变换并寻找逆 z 变换时，得到输出 $y_2(n)$。

在这个实例中，系统的固有频率为系统行列式的零点

$$\left\|\begin{matrix}(1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}) & 0\\ -2z^{-1} & (1+0.1z^{-1})\end{matrix}\right\|$$

它是 $1+0.3z^{-1}+0.42z^{-2}+0.04z^{-3}=z^{-3}(z^3+0.3z^2+0.42z+0.04)$[⊖]。很明显，这个行列式的零点和传递函数的极点是一样的

$$H(z)=\frac{Y_2(z)}{X(z)}=\frac{2z}{z^3+0.3z^2+0.42z+0.04}$$

⊖ 原书为 $1+0.21z^{-1}+0.42z^{-2}+0.04z^{-3}$，有误。——译者注

只要 $H(z)$ 的这些极点不被其零点抵消，即，如果在其分子和分母之间没有公因式，其逆 z 变换将显示所有三个固有频率。如果传递函数的一些极点被其零点抵消，并且因此在其简化形式中给出，可能将无法识别出系统所有的固有频率。因此，找到系统所有固有频率的唯一方法是寻找系统行列式或特征多项式的零点。在这个实例中，系统响应包含其固有响应中的三项，对应于系统的三个固有频率。但是，如果当一些零点抵消极点时，对应于被抵消极点的固有响应组件将不会出现在零状态响应 $h(n)$ 中。所以需要重复的是，在某些情况下，传递函数的极点可能不会显示系统所有的固有频率。

注意，当初始状态为零时，$Y_2(z)$ 的逆 z 变换由 $Y_2(z)=H(z)X(z)$ 计算。因此，对于给定的输入 $x(n)$，响应 $y_2(n)$ 正好是系统的零状态响应。

2.4.1 瞬态响应和稳态响应

总响应也可以表示为其瞬态响应和稳态响应的总和。但是又会有一种误解，系统的固有响应和瞬态响应是一样的，因此，下面给出的解释就是为了澄清这一误解。

瞬态响应是总响应的组成部分，当 $n\to\infty$ 时它将趋于零，而稳态响应是留下的作为非零组件的部分。当 $n\to\infty$ 时，位于 z 平面单位圆内带有其频率的所有项都趋于零，位于单位圆上带有单极点的项贡献给了稳态响应。

例如，考虑函数：

$$Y(z)=\frac{0.5z}{z-1}+\frac{z}{(z-0.2)^2}+\frac{0.4z}{z+0.4}+\frac{0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}40^\circ}z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}50^\circ}}+\frac{0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}40^\circ}z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}50^\circ}}$$

得到的响应 $y(n)$ 为

$$y(n)=[0.5+5n(0.2)^n+0.4(-0.4)^n+\cos(50^\circ n+40^\circ)]u(n)$$

在这个实例中，$Y(z)$ 在 $z=0.2$ 处有一对极点，在 $z=-0.4$ 处有单个极点，单位圆内部对应于这些频率的项 $[5n(0.2)^n+0.4(-0.4)^n]u(n)$ 构成了 $y(n)$ 中的瞬态响应，因为这些项在 $n\to\infty$ 时趋于 0。$Y(z)$ 中的其他项在 $z=1$ 处有一个极点，而另一个在 $z=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{j}50^\circ}$ 处。这些频率在单位圆上，其逆 z 变换为 $[0.5+\cos(50^\circ n+40^\circ)]u(n)$，它是保持有界的并且当 $n\to\infty$ 时非零。这是 $y(n)$ 中的稳态组件，很明显，瞬态响应和稳态响应的总和是系统的总响应 $y(n)$。$z=\pm\mathrm{e}^{\mathrm{j}50^\circ}$ 处的频率可能是系统的固有频率或强迫函数的频率；这也适用于显示为 $Y(z)$ 极点的其他频率。因此，固有响应和强迫响应不一定与瞬态响应和稳态响应相同。只有通过使用这些项的不同定义确定添加到总响应的不同组件。总之，我们用下列三种不同的方法显示了如何表示作为两项总和的总响应：

1）零状态响应和零输入响应；

2）固有响应和强迫响应；

3）瞬态响应和稳态响应。

2.5　z 变换方法回顾

系统的传递函数 $H(z)$ 定义为在所有初始状态为零和系统内部没有其他独立源的条件下输出 z 变换和输入 z 变换的比率。对于图 2.6 中描述的系统，其比率为

$$\frac{Y_2(z)}{X(z)} = \frac{2z}{z^3 + 0.3z^2 + 0.42z + 0.04} = H(z)$$ [㊀]

这就是传递函数。因此，也可以使用关系 $Y_2(z) = H(z)X(z)$。这意味着，当 $X(z) = 1$ 和初始状态为零时，我们有 $Y_2(z) = H(z)$，或者当系统被单位脉冲函数 $\delta(n)$ 激励时，在零初始状态的条件下系统的输出响应由 $H(z)$ 的逆 z 变换给出。因此，用 $h(n)$ 表示的单位脉冲响应由 $Z^{-1}[H(z)]$ 给出。所以 $h(n)$ 是仅由激励 $\delta(n)$ 引起的响应。然而，从一般关系 $Y_2(z) = H(z)X(z)$ 中，我们观察到，如果知道传递函数 $H(z)$ 或系统的单位脉冲响应 $h(n)$，可以找到由任何其他输入 $x(n)$ 引起的响应。因此，$H(z)$ 或单位脉冲响应 $h(n)$ 构成了系统的另一个模型。如果已经推导出或已给定 $H(z)$ 或 $h(n)$，接下来寻找给定输入的 z 变换 $X(z)$ 并将 $H(z)$ 和 $X(z)$ 相乘得到 $Y(z) = H(z)X(z)$ 作为输出的 z 变换。随后，寻找 $y(z)$ 的逆 z 变换来得到输出 $y(n)$。对于这些代数性质操作，寻找输出 $y(n)$ 作为 $H(z)X(z)$ 的逆 z 变换是一种寻找系统输出的有效方法。正是这种 z 变换方法广泛地用于系统分析中，但这取决于满足两个条件：可以找到输入序列的 z 变换和知道或可以找到系统的传递函数。学生们应该意识到，在实践中不可能满足这些条件中的一个或两个，因此需要寻找系统分析和设计的其他方法。例如，寻找通过对语音进行采样获得的离散时间信号的封闭式表达是不容易的。寻找物理系统的传递函数可能不会如式 (2.46) 所示的那么容易和直截了当。在这本书中，假设总满足这些条件。

2.6　卷积回顾

在上一节的卷积中，已经得出，线性时不变离散时间系统的输出 $y(n)$ 通过 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积得到，具体地是

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

既然，$Y(z) = H(z)X(z) = X(z)H(z)$，现在得出这样的结论：卷积和操作是可交换的：

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

因此，$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$。

证明这一结论的另一种方法如下。令

㊀ 原书为 $\frac{Y_2(z)}{X(z)} = \frac{2z}{z^3 + 0.3z^2 + 0.02z + 0.8}$，有误。——译者注

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)\right]z^{-n}$$

交换求和的顺序，得到

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\sum_{n=0}^{\infty} h(n-k)z^{-n}$$

做替换 $m=n-k$，现在有

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\sum_{m=-k}^{\infty} h(m)z^{-(m+k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\sum_{m=-k}^{\infty} h(m)z^{-m} \end{aligned}$$

但是 $h(m)=0(-k\leqslant m\leqslant -1)$，因此

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\sum_{k=0}^{\infty} h(m)z^{-m} \\ &= X(z)H(z) = H(z)X(z) \end{aligned}$$

因此，我们已经证明

1) $x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$，这意味着卷积和是可交换的。现在，通过使用离散时间序列 z 变换的代数关系可以很容易证明这满足下列附加特性。

2) $KX_1(z)X_2(z)=X_1(z)KX_2(z)$。因此，卷积和操作是线性的：$Kx_1(n)*x_2(n) = x_1(n)*Kx_2(n)$。

3) $[X_1(z)X_2(z)]X_3(z)=X_1(z)[X_2(z)X_3(z)]$。因此，卷积和操作是可结合的：

$[x_1(n)*x_2(n)]*x_3(n) = x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]$

4) $X_1(z)[X_2(z)+X_3(z)] = X_1(z)X_2(z)+X_1(z)X_3(z)$。卷积和操作是可分配的：

$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

有趣的是，为卷积和操作做如下解释的新的理解。令 z 变换 $X(z)$、$H(z)$ 和 $Y(z)$ 幂级数展开式表示为

$$X(z) = x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + x_3z^{-3} + \cdots$$

$$H(z) = h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + h_3z^{-3} + \cdots$$

$$Y(z) = y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + y_3z^{-3} + y_4z^{-4} + y_5z^{-5} + y_6z^{-6} + \cdots$$ [㊀]

系数 x_0，x_1，x_2，…和 h_0，h_1，h_2，h_3，…是输入 $x(n)$ 的已知采样和单位采样响应 $h(n)$。一个或两个序列长度可能有限或无限。如果对 $X(z)$ 和 $H(z)$ 的多

㊀ 原书为 y_5z^{-4}，有误。——译者注

项式或幂级数进行相乘，并将所有项归类为z^{-n}的系数，在多项式和幂级数中我们得到

$$\begin{aligned}X(z)H(z) &= (x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \cdots) \\ &\quad \times (h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \cdots) \\ &= (x_0 h_0) + (x_0 h_1 + x_1 h_0) z^{-1} + (x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0) z^{-2} \\ &\quad + (x_0 h_3 + x_1 h_2 + x_2 h_1 + x_3 h_0) z^{-3} + \cdots\end{aligned}$$

通过对比$Y(z)$和这个表达式中的系数z^{-n}，注意到

$$\begin{aligned}y_0 &= (x_0 h_0) \\ y_1 &= (x_0 h_1 + x_1 h_0) \\ y_2 &= (x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0) \\ y_3 &= (x_0 h_3 + x_1 h_2 + x_2 h_1 + x_3 h_0) \\ &\vdots \\ y_n &= (x_0 h_n + x_1 h_{n-1} + x_2 h_{n-2} + x_3 h_{n-3} + \cdots + x_n h_0) \\ &\vdots\end{aligned} \tag{2.51}$$

这些和式（2.7）中给出的结论是相同的，它是通过展开卷积和得到的。

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

可以将多项式和幂级数相乘为$H(z)X(z)$，并识别结果多项式的系数为

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

（也可以通过计算$H(z)$和$X(z)$的系数卷积找到$H(z)X(z)$的系数）随后，我们会得到以下系数的表达式，它与式（2.51）给出的是一样的：

$$\begin{aligned}y_0 &= (h_0 x_0) \\ y_1 &= (h_0 x_1 + h_1 x_0) \\ y_2 &= (h_0 x_2 + h_1 x_1 + h_2 x_0) \\ y_3 &= (h_0 x_3 + h_1 x_2 + h_2 x_1 + h_3 x_0) \\ &\vdots \\ y_n &= (h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2} + h_3 x_{n-3} + \cdots + h_n x_0) \\ &\vdots\end{aligned} \tag{2.52}$$

你可以将研究系统的系数$h(n)$和$x(n)$存储在计算机或工作站中，进行离线时域反转，延迟时域反转序列，对数据项进行相乘并如图2.4中所示的加乘积。已开发出了以非常快速和有效的方式执行两个序列卷积的计算机软件——即使适当序列很长时[㊀]。但是包含例如延迟元素、乘法器和加法器的电子设备的真

㊀ 用于提高计算效率的两种方法被称为重叠添加和重叠保存方法。有兴趣了解这些方法更多细节的读者可以参考其他书籍。

正的硬件不能实时反转序列，但是它在输入的来样采样上执行如下操作。当采样 x_0 在 $t=0$ 进入系统时，出现在输出端的序列是 $x_0h(nT)$；当下一个采样 x_1 在 $t=T$ 进入系统时，出现在输出端的序列 $x_1h(nT-T)$，当下一个采样 x_2 进入系统时，输出端的序列是 $x_2h(nT-2T)$ 等。在任意时间 $t=mT$，输出采样值为

$$y(mT)=x_0h(mT)+x_1h(mT-T)+x_2h(mT-2T)+x_3h(mT-3T)+\cdots$$

这是由实际硬件实现的物理过程；实现这一过程的实例如图 2.2 所示。然而，可以对实际硬件进行编程以便在其寄存器中存储输入数据 $x(n)$ 和 $h(n)$ 并实现卷积和。

记住这一点是很重要的，卷积可以用于求输出，即使是当输入序列不具有 z 变换时，也就是说，当我们不能使用 z 变换方法时。这使得卷积成为信号处理中最基本的操作，它也是由电子硬件实现的最有效的算法，因为它不知道什么是 z 变换！

例 2.15

假设输入序列为 $x(n)=(0.1)^{n^2}u(n)$，单位冲激响应 $h(n)=\{0.2\quad 0.4\quad 0.6\quad 0.8\quad 1.0\}$。

无限长序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 没有封闭表达式，然而，很容易写出 z 变换 $H(z)=0.2+0.4z^{-1}+0.6z^{-2}+0.8z^{-3}+z^{-4}$。因此无法找到有理函数 $X(z)H(z)=Y(z)$ 并将其进行转化得到 $y(n)$。然而，根据算法 $x(n)*h(n)$ 或 $h(n)*x(n)$ 中的一种，多项式 $H(z)$ 可以乘以幂级数 $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(0.1)^{n^2}z^{-n}$ 来得到 $y(n)$。例如

$$\begin{aligned}
&y(0)=0.2\\
&y(1)=0.4+0.1(0.2)\\
&y(2)=0.6+(0.1)(0.4)+(0.1)^4(0.2)\\
&y(3)=0.8+(0.1)(0.6)+(0.1)^4(0.4)+(0.1)^9(0.2)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

回忆一下，为了寻找由给定输入引起的输出，我们已经得到两个不同的方程。它们是卷积和（2.6）和线性差分方程（2.2），将它们重复写在下面。

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)h(n-k) \tag{2.53}$$

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a(k)y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b(k)x(n-k) \tag{2.54}$$

在方程（2.53）中，输入序列和当前以及以前单位冲激响应值的乘积被累加，而在方程（2.54）中，将以前的输出值和当前以及过去的输入值乘以固定系数并进行累加。第一种情况下的传递函数 $H(z)$ 由 $H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$ 给出，

对于第二种情况，使用双边 z 变换得到

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a(k) z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b(k) z^{-k} X(z)$$

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a(k) z^{-k}\right] = \sum_{k=0}^{M} b(k) z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k) z^{-k}}{\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a(k) z^{-k}\right]}$$

因此，可以由定义了输入 - 输出关系的线性差分方程（2.54）推导出传递函数 $H(z)$。

我们也可以简单地反转步骤，由传递函数 $H(z)$ 得到定义输入 - 输出关系的线性差分方程。给定传递函数 $H(z)$，得到 $Y(z)[1 + \sum_{k=1}^{N} a(k)z^{-k}] = \sum_{k=0}^{M} b(k)z^{-k}X(z)$。为每一项寻找其逆 z 变换，就得到系统的输入 - 输出关系，如以下实例所示。

例 2.16

假定给定传递函数

$$H(z) = \frac{0.2 + 0.1z}{0.8 + 0.6z + 0.2z^2 + z^3}$$

将分子和分母都除以 z^3，将其重写为 z 反幂的传递函数，得到

$$H(z^{-1}) = \frac{0.1z^{-2} + 0.2z^{-3}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.8z^{-3}} = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})}$$

因此

$$Y(z^{-1})(1 + 0.2z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.8z^{-3}) = X(z^{-1})(0.1z^{-2} + 0.2z^{-3})$$

通过表示每一项的逆 z 变换，得到线性差分方程或输入 - 输出关系为

$$y(n) + 0.2y(n-1) + 0.6y(n-2) + 0.8y(n-3) = 0.1x(n-2) + 0.2x(n-3)$$

因为通过将初始条件设置为零定义和推导出传递函数，因此可以断言，我们无法由传递函数找到由初始条件引起的响应，但这并不是正确的。在前面的实例中，从给定的传递函数推导出输入输出关系之后，我们编写了相应的包括含有初始条件项的 z 变换方程，形如

$$\begin{aligned} Y(z) &+ 0.2[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 0.6[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] \\ &+ 0.8[z^{-3}Y(z) + z^{-2}y(-1) + z^{-1}y(-2) + y(-3)] \\ &= 0.1z^{-2}X(z) + 0.2z^{-3}X(z) \end{aligned}$$

在这些方程中，替代初始条件 $y(-1)$、$y(-2)$ 和 $y(-3)$，并得到了系统的零输入响应和零状态响应。因此，传递函数 $H(z)$ 构建了离散时间系统的完整模型。

2.7 模型转换

在本节中，我们复习了讨论过的重要概念和技术。为此，选择下面的另一个实例。

例 2.17

离散时间系统的电路图如图 2.7 所示。描述它的方程为

$$\begin{aligned} y_1(n) &= -x(n) + y_3(n-2) \\ y_2(n) &= d_2 y_1(n) + x(n-1) - y_3(n-1) \\ y_3(n) &= x(n-2) + d_1 y_2(n) \end{aligned} \tag{2.55}$$

让我们尝试抵消内部变量 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$，得到与输出 $y_3(n)$ 和 $x(n)$ 相关的差分方程：

$$\begin{aligned} y_3(n) &= x(n-2) + d_1[d_2 y_1(n) + x(n-1) - y_3(n-1)] \\ &= x(n-2) + d_1\{d_2[-x(n) + y_3(n-2)] + x(n-1) - y_3(n-1)\} \end{aligned}$$

下面给出的差分方程是通过在式 $y_3(n)$ 中依次替代式 $y_2(n)$ 和 $y_1(n)$ 得到的输入 - 输出关系：

$$y_3(n) + d_1 y_3(n-1) - d_1 d_2 y_3(n-2) = x(n-2) + d_1 x(n-1) - d_1 d_2 x(n) \tag{2.56}$$

但是请记住，通常从在时域书写的许多方程中通过依次抵消来得到单输入 - 单输出关系可能并不是那么容易的。得到 z 变换方程（2.55）或直接从电路图写出 z 变换方程，使用矩阵代数得到传递函数 $H(z)$，然后得到如下所示的差分方程总是比较容易的：

$$Y_1(z) = -X(z) + z^{-2} Y_3(z)$$

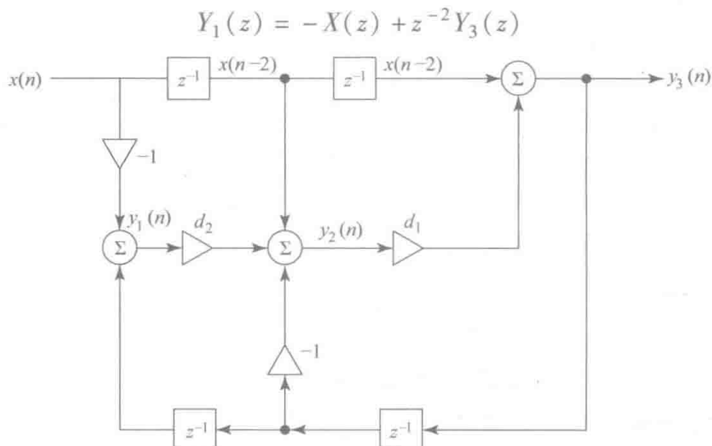


图 2.7 离散时间系统的结构

$$Y_2(z)=d_2Y_1(z)+z^{-1}X(z)-z^{-1}Y_3(z) \tag{2.57}$$
$$Y_3(z)=z^{-2}X(z)+d_1Y_2(z)$$

使用矩阵代数求解这些代数方程，得到

$$\frac{Y_3(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{z^{-2}+d_1z^{-1}-d_1d_2}{1+d_1z^{-1}-d_1d_2z^{-2}} \tag{2.58}$$

现在，可以推导形如式（2.56）的与输入和输出相关的差分方程。

选择 $d_1=0.5$，$d_2=-0.5$。然后将前面的传递函数简化为

$$H(z)=\frac{z^{-2}+0.5z^{-1}+0.25}{1+0.5z^{-1}+0.25z^{-2}}$$
$$=\frac{1+0.5z+0.25z^2}{z^2+0.5z+0.25} \tag{2.59}$$

计算单位冲激响应 $h(n)$，其为 $H(z)$ 的逆 z 变换：

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{4}{z}+\frac{k_1}{z+0.25-\mathrm{j}0.433}+\frac{k_1^*}{z+0.25+\mathrm{j}0.433}$$ ㊀
$$=\frac{4}{z}+\frac{1.9843\mathrm{e}^{\mathrm{j}160.9^\circ}}{z-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ}}+\frac{1.9843\mathrm{e}^{-\mathrm{j}160.9^\circ}}{z-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}}$$

因此，有

$$H(z)=4+\frac{(1.9843\mathrm{e}^{\mathrm{j}160.9^\circ})z}{z-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ}}+\frac{(1.9843\mathrm{e}^{-\mathrm{j}160.9^\circ})z}{z-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}}$$
$$h(n)=4\delta(n)+1.9843[\mathrm{e}^{160.9^\circ}(0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ})^n+\mathrm{e}^{-160.9^\circ}(0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ})^n]$$
$$=4\delta(n)+[3.9686(0.5)^n\cos(120^\circ n+160.9^\circ)]u(n) \tag{2.60}$$

2.7.1　模型产生回顾

使用上面的实例，回顾由系统得出的不同模型，并显示如何从其他模型得到一个模型。回忆 2.1 节中给出的离散时间系统模型的两个定义：

1）图 2.7 中所示的电路图是模型 1，以框图形式表示。

2）离散时间域中的方程是模型 2——一个实例是方程（2.55）。

3）对于输入 - 输出关系的单个差分方程是模型 3——一个实例是方程（2.56）。

4）z 域中的方程是模型 4——一个实例是方程（2.57）。

5）模型 3 的 z 变换或传递函数 $H(z)$ 是模型 5——一个实例是方程（2.59）。

6）单位冲激响应 $h(n)$ 是模型 6——一个实例是方程（2.60）。

第一个模型是电路框图，而其余的是描述离散时间系统的数学模型。

在上述得以解决的实例中，显示了如何由模型 1 推导出模型 2，由模型 2 推

㊀ 原书等号右侧第一项为 4，有误。——译者注

导出模型3，以及由模型5推导出模型6。很容易看到，我们可以从模型6得到模型5，从模型5得到模型3。但是，当从模型3或模型4得到模型2或模型4时，结果是不唯一的。我们将显示的从模型5得到电路图模型也是不唯一的。然而，从其他多个模型中灵活地生成一个模型使得对离散时间系统的分析变得非常通用，并且需要了解如何为带有给定初始状态的给定输入选择最合适的模型来寻找系统的输出。即使在给定零初始状态的条件下推导出系统的传递函数时，我们也可以得到模型3，然后可以包括初始状态下输出的先前值并得到总输出。

性质2.3：时域反转　如果$X(z)$是因果序列$x(n)$的z变换($n\geqslant 0$)，则序列$x(-n)$的z变换是$X(z^{-1})$。通过反转时间序列得到序列$x(-n)$，它可以通过只存储$x(n)$的采样和通过反转序列的次序生成序列$x(-n)$。如果离散时间序列或数据$x(n)$录制在盒式磁带或磁带上，播放它必须通过反转生成$x(-n)$。尽管序列$x(-n)$不能由实际的数字信号处理器实时生成，序列$x(-n)$及其z变换$X(z^{-1})$仍被广泛地应用于为设计数字信号处理器的数字信号处理仿真和分析中。

令$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$。则$\sum_{n=-\infty}^{0}x(-n)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{n}=X(z^{-1})$。

例2.18

$$Z[(0.5)^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}(0.5)^n z^{-n}=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}=\frac{z}{z-0.5}=X(z)$$

$$Z[(0.5)^{-n}u(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{0}(0.5)^{-n}z^{n}=X(z^{-1})=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-0.5}=\frac{1}{1-0.5z}$$

如果

$$F(z)=\frac{0.1+0.25z^{-1}+0.6z^{-2}}{1.0+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}+0.3z^{-3}+0.08z^{-4}} \tag{2.61}$$

是$f(n)u(n)$的z变换，分子和分母多项式都乘以z^4，可以将$F(z)$表示为如下形式

$$F(z)=\frac{0.1z^4+0.25z^3+0.6z^2}{z^4+0.4z^3+0.5z^2+0.3z+0.08} \tag{2.62}$$

通过在式（2.62）中将z替换为z^{-1}得到$f(-n)u(-n)$的z变换，因此$f(-n)u(-n)$的z变换为

$$F(z^{-1})=\frac{0.1z^{-4}+0.25z^{-3}+0.6z^{-2}}{z^{-4}+0.4z^{-3}+0.5z^{-2}+0.3z^{-1}+0.08} \tag{2.63}$$

$$=\frac{0.1+0.25z+0.6z^2}{1.0+0.4z+0.5z^2+0.3z^3+0.08z^4} \tag{2.64}$$

它与上述给出的式（2.61）或式（2.62）中的$F(z)$是不同的。

性质2.4：初始值　如果已知序列$x(n)$的z变换为$X(z)$，其采样$x(0)$的值被称为初始值，它很容易地由

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

得出。

通过表示 $X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$ 并注意到除了第一项 $x(0)$ 之外的所有项当 $z\to\infty$ 时都趋于 0，可以证明这一结论。然而，如果对寻找几个开始时的采样 $x(0),x(1),x(2)\cdots x(k)$ 感兴趣，而不只是对初始值 $x(0)$ 感兴趣，则需要使用下面的长除法得到商的几个采样。

例如，考虑一下传递函数

$$\begin{array}{r|l}
 & 0.1+0.21z^{-1}-0.134z^{-2}-0.0514z^{-3}+\cdots \\
\hline
1.0+0.4z^{-1}+0.5z^{-2} & 0.1+0.25z^{-1} \\
 & 0.1+0.04z^{-1}+0.05z^{-2} \\
\hline
 & 0.21z^{-1}-0.05z^{-2} \\
 & 0.21z^{-1}+0.084z^{-2}+0.105z^{-3} \\
\hline
 & -0.134z^{-2}-0.105z^{-3} \\
 & -0.134z^{-2}-0.0536z^{-3}-0.067z^{-4} \\
\hline
 & -0.0514z^{-3}+0.067z^{-4} \\
 & \ddots
\end{array} \tag{2.65}$$

从商的系数中看到：$x(0)=0.1$，$x(1)=0.21$，$x(2)=-0.134$，$x(3)=-0.0514$，继续这一过程，可以得到 $x(4)$，$x(5)$，……

寻找传递函数 $X(z)$ 逆 z 变换少数几个系数的方法可以表示为一个递归公式[1,6]，如下给出。令传递函数 $X(z)$ 表示为如下形式

$$\frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \cdots \tag{2.66}$$

逆 z 变换的采样通过递归公式给出

$$x_n = \frac{1}{a_0}\left[b_n - \sum_{i=1}^{n} x(n-i)a_i\right], \quad n=1,2,\cdots \tag{2.67}$$

其中，$x_0=b_0/a_0$。

性质 2.5 终值 当 $n\to\infty$ 时为了寻找 $x(n)$ 的值，使用

$$\lim_{N\to\infty} x(N) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

假定 $(z-1)X(z)$ 的所有极点都在单位圆内。

证明：考虑 $X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$。如果将序列 $x(0)$，$x(1),x(2),\cdots$ 左移（即提前）一个采样点，得到序列 $x(1)$ 的值在 $n=0$ 处，在 $n=1$ 处得到 $x(2)$ 的值，在 $n=2$ 处得到 $x(3)$ 的值等。这个序列表示为 $x(n+1)$，该序列的单边 z 变换为

$$
\begin{aligned}
Z[x(n+1)] &= x(1)+x(2)z^{-1}+x(3)z^{-2}+x(4)z^{-3}+\cdots \\
&= z[x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+x(4)z^{-4}+\cdots] \\
&= z[-x(0)+x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}+x(4)z^{-4}+\cdots] \\
&= z[-x(0)+X(z)]
\end{aligned}
$$

令 $Z[x(n)] = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} x(n)z^{-N}$ 及 $Z[x(n+1)] = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} x(n+1)z^{-N}$

则

$$
\begin{aligned}
Z[x(n+1)] - Z[x(n)] &= \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N}[x(n+1)-x(n)]Z^{-N}\right\} \\
&= z[-x(0)+X(z)] - X(z) \\
&= [(z-1)X(z) - zx(0)]
\end{aligned}
$$

令 $z\to1$，得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N}[x(n+1)-x(n)]\right\} &= \lim_{z\to1}[(z-1)X(z)-zx(0)] \\
&= \lim_{N\to\infty}[x(N+1)-x(0)] \\
&= \lim_{z\to1}[(z-1)X(z)-x(0)] \\
&= x(\infty)-x(0)
\end{aligned}
$$

其中，假定 $\lim\limits_{N\to\infty}\{[x(N+1)]\}=x(\infty)$ 具有有限值或零值。当 $(z-1)X(z)$ 的所有极点都在单位圆内时满足这一条件。在这一条件下，证明了

$$
x(\infty) = \lim_{z\to1}[(z-1)X(z)]
$$

性质 2.6：乘以 r^n　如果有 $Z[x(n)u(n)] = X(z)$，则 $Z[r^n x(n)u(n)] = X(z/r)$。

证明：

$$
Z[r^n x(n)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{r}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{r}\right)
$$

在表 2.1 中推导几个 z 变换时已经使用了这一性质。作为另外的例子，令 $Z[a^n u(n)] = Z/(Z-a)$。则

$$
Z[r^n a^n u(n)] = \frac{\left(\frac{z}{r}\right)}{\left(\frac{z}{r}\right)-a} = \frac{z}{z-ra}
$$

其他一些性质已经在本章中讨论过，表 2.3 总结了 z 变换的性质。

表 2.3　z 变换的性质

运算	$x(n)u(n)$	$X(z)$
加法	$x_1(n)+x_2(n)$	$X_1(z)+X_2(z)$
标量乘法	$Kx(n)$	$KX(z)$
延时	$x(n-1)u(n-1)$	$z^{-1}X(z)+x(-1)$
	$x(n-2)u(n-2)$	$z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$
	$x(n-3)u(n-3)$	$z^{-3}X(z)+z^{-2}x(-1)+$ $z^{-1}x(-2)+x(-3)$
	$x(n-m)u(n-m)$	$z^{-m}X(z)+\sum_{n=0}^{m-1}x(n-m)z^{-n}$
时域反转	$x(-n)u(-n)$	$X(z^{-1})$
乘 n	$nx(n)$	$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$
乘 r^n	$r^n x(n)$	$X(r^{-1}z)$
时间卷积	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$
调制	$x_1(n)x_2(n)$	$(1/2\pi\mathrm{j})\int_C X_1(z)X_2\left(\frac{z}{u}\right)u^{-1}\mathrm{d}u$
初值	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty}X(z)$
终值	$\lim_{N\to\infty x(N)}$	$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$，当极点 $(z-1)X(z)$ 在单位圆内

2.8　稳定性

在实际使用中，由工程师设计的每个系统都是要非常稳定的，这一点至关重要。因此，必须在各种操作条件和环境下不断地分析系统的稳定性。最基本的要求是当系统被微小的输入干扰时，其响应将最终为零或一个常数值，或最多是被限定在一个有限的范围内。关于稳定性的定义有很多种类型，但最常使用的定义是当应用有界输入时输出会逐渐接近一个常数或有界值。这就是所谓的有界输入-有界输出（BIBO）稳定性条件。当单位冲激响应 $h(n)$ 满足条件 $\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<M<\infty$ 时，它满足这一条件。为了证明这一结论，假设$H(z)=z/(z-\gamma_i)$㊀，其中 γ_i 是 $H(z)$的极点。单位冲激响应是 $\gamma_i^n(n\geqslant 0)$：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_i|^n$$

$$=\frac{1}{1-|\gamma_i|},\text{当}|\gamma_i|<1\text{时}$$

当 $H(z)=N(z)/\prod_{i=1}^{K}(z-\gamma_i)$ 时，其中 γ_i 是 $H(z)$的极点，对于 $|\gamma_i|<1$ $(i=1,2,3,\cdots)$，得到

㊀ 原书为 $H(z)=z/z-\gamma_i$，有误。——译者注

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \leqslant \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{1-|\gamma_i|} < \infty$$

接下来考虑其幅值上受限的输入 $x(n)$：

$$|x(n)| < B(\text{对于所有的 } n)$$

根据卷积特性，得到

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leqslant \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|\right|$$

因为对于所有的 n 值和 k 值，都有 $|x(n)| < B$，得到

$$|y(n)| \leqslant B\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \text{对所有的 } n$$

因此，得出这样的结论：如果冲激响应具有绝对可加性，也就是说，如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

则当输入 $x(n)$ 有界时输出 $y(n)$ 在也是有界的，系统是 BIBO 稳态的。

可以使用一些测试来确定传递函数的极点是否在 z 平面的单位圆内部。

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + \cdots + a_N z^{-N}} \\ &= \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_M z^{N-M}}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_N} \end{aligned}$$

2.8.1 Jury – Marden 检验

为了确定极点是否在 z 平面的单位圆内部，我们选择 Jury – Marden 检验[1,4]，因为它与学生们在先前课程中学习过的 Routh – Hurwitz 检验有一些相似之处，并且与其他可用的检验相比要更容易一些。㊀

考虑按 z 的降幂排列的分母系数，特别是 $D(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_N$，其中 $a_0 > 0$。Jury – Marden 数组的第一行列出了系数 a_0，a_1，a_2，…，a_N（见表 2.4），第二行以逆序列出了这些系数，a_N，a_{N-1}，a_{N-2}，…a_2，a_1，a_0，因此我们从带有直接从给定多项式选出的元素的这两行开始：

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_{N-1} & a_N \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} \cdots a_1 & a_0 \end{matrix}$$

按照下列规则计算第三行元素为二阶行列式：

$$c_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{N-i} \\ a_N & a_i \end{vmatrix} \quad i = 0,1,2,\cdots,(N-1)$$

㊀ 然而，在第 6 章中我们描述的 MATLAB 函数 tf2latc 的使用是基于 Schur – Cohn 测试的。

表 2.4　Jury – Marden 系数的数组

行	系数			
1	a_0	a_1	$a_2 \cdots a_{N-1}$	a_N
2	a_N	a_{N-1}	$a_{N-2} \cdots a_1$	a_0
3	c_0	c_1	$c_2 \cdots$	c_{N-1}
4	c_{N-1}	c_{N-2}	$\cdots c_1$	c_0
5	d_0	d_1	$d_2 \cdots d_{N-2}$	
6	d_{N-2}	d_{N-3}	$\cdots d_0$	
7				
8				
⋮				
$2N-3$	r_0	r_1	r_2	

例如

$$c_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_N \\ a_N & a_0 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{N-1} \\ a_N & a_1 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{N-2} \\ a_N & a_2 \end{vmatrix}$$

注意，在计算 c_i 时多项式第一列不会随着 i 的改变而改变。第四行的系数是第三行系数的逆序，如下列数组中所示。第五行的元素通过下式计算得出：

$$d_i = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{vmatrix} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, (N-2)$$

例如

$$d_0 = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 \end{vmatrix}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-2} \\ c_{N-1} & c_1 \end{vmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} c_0 & c_{N-3} \\ c_{N-1} & c_2 \end{vmatrix}$$

并且，第六行的元素是第五行元素的逆序。注意，这些行中的元素个数比上述两行中的元素个数少一。随着继续这一过程，行中每个连续对的元素减少一个，直到我们构造 $(2N-3)$ 个行和具有三个元素的最后一行为止。将它们表示为 r_0，r_1，r_2。

Jury – Marden 检验规定，当且仅当下列三个条件满足时，分母多项式 $D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_N$ 具有 z 平面单位圆内的根。在此需要注意的是，需

要将分母多项式表达为 z 的正幂，因为我们必须在如下所示前两个规则在 $z=\pm1$ 上对其进行评估：

1) $D(1)=D(z)|_{z=1}>0$;

2) $(-1)^N D(-1)>0$;

3) $a_0>|a_N|$。

且

$$|c_0|>|c_{N-1}|$$
$$|d_0|>|d_{N-2}|$$
$$\vdots$$
$$|r_0|>|r_2|$$

例 2.19

考虑分母多项式 $D(z)=5z^5+4z^4+3z^3+z^2+z+1$。采用上述方法构建 Jury - Marden 数组：

行	系数					
1	5	4	3	1	1	1
2	1	1	1	3	4	5
3	24	19	14	2	1	
4	1	2	14	19	24	
5	575	454	322	29		
6	29	322	454	575		
7	329784	251712	171984			

检查是否满足三个测试标准：

$$D(1)=D(z)|_{z=1}=15(-1)^5D(-1)=3$$ [⊖]

$$a_0=5;\quad a_5=1;\quad a_0>|a_5|$$
$$c_0=24;\quad c_4=1;\quad |c_0|>|c_4|$$
$$d_0=575;\quad d_3=29;\quad |d_0|>|d_4|$$
$$r_0=329784;\quad r_2=171984;\quad |r_0|>|r_2|$$

所有的条件都满足,因此上述 $D(z)$ 在单位圆内有其五个零点。

例 2.20

现在考虑另一个例子：$D(z)=3z^4+5z^3+3z^2+2z+1$。构建如下所示的 Jury - Marden数组：

行		Jury - Marden 数组				
	1	3	5	3	2	1
	2	1	2	3	5	3
	3	8	13	6	1	
	4	1	6	13	8	
	5	63	98	35		

⊖ 原书为 $D(1)=D(z)|_{z=1}=15(-1)^5R(-1)-3$，有误。——译者注

尽管已经计算出了数组中的所有条目，但发现$(-1)^4 D(-1)=0$，不符合第二个准则。得出这样的结论：$D(z)$至少有一个零点不在单位圆内。实际上，可以发现有一个零点在 $z=-1.000$ 处。在开始时检查是否满足前两个准则是个好主意，因为如果不满足这两个准则中的一个或两个（很容易检查），就无需计算 Jury - Marden 数组前两行之后的行中的条目。

2.9　使用 MATLAB 函数求解

在前面的章节中，已经描述了离散时间系统的很多模型，并讨论了给定输入序列时寻找系统输出的三种方法，在某些情况下的初始条件也已给定。

这三种方法是：

1）递归算法；

2）卷积和；

3）z 变换方法。

在本节中，示例说明了使用 MATLAB 函数来实现前面几节中讨论的一些算法。在此强烈建议学生阅读第 9 章中的 MATLAB 入门来更新对 MATLAB 的理解，尽管它只是一个软件介绍。

首先考虑由线性平移不变差分方程描述的系统的情况

$$y(n)=0.4y(n-1)+0.05y(n-2)+x(n)$$

其中给定初始状态为$y(-1)=2$ 和$y(-2)=1.0$。已经学习了如何使用递归算法寻找对于任意给定输入的系统输出。假设$x(n)=\delta(n)$，在本例中假定两个初始状态都为零，得到单位冲激响应 $h(n)$。知道了单位冲激响应后，就可以使用卷积和寻找任意给定输入时的响应。需要指出的是，因为它使用 $h(n)$，卷积算法仅用于寻找零状态响应，而递归算法可以计算给定输入和初始状态下的总响应。

现在使用 z 变换来转换上面的差分方程，得到

$$\begin{aligned}Y(z)[1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2}]&=0.4y(-1)+0.05[z^{-1}y(-1)+y(-2)]+X(z)\\&=(0.8+0.1z^{-1}+0.05)+X(z)\end{aligned}$$

因此

$$Y(z)=\frac{0.85+0.1z^{-1}}{1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2}}+\frac{X(z)}{1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2}} \tag{2.68}$$

$$=Y_{0i}(z)+Y_{0s}(z) \tag{2.69}$$

$$=Y_{0i}(z)+H(z)X(z)$$

由给定的描述离散时间系统的线性差分方程获得传递函数 $H(z)=1/(1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2})$。

但是，当决定使用 MATLAB 函数时，需要注意的是，如果给定的输入是一个有限长度序列 $x(n)$，可以容易地找到按照 z 的降幂排列的多项式系数作为行向量，在定义多项式 $X(z)$ 时将会需要这些系数。但是如果输入 $x(n)$ 是无限长的，MATLAB 可能找不到无限幂级数的闭合形式表示；

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

必须寻找 $X(z)$ 的分子系数和分母系数。

例 2.21

作为一个例子，假设 $x(n)=[(-0.2)+0.5(0.3)^n]u(n)$。它的 z 变换为

$$X(z) = \frac{z}{z+0.2} + \frac{0.5z}{z-0.3} \tag{2.70}$$

$$= \frac{1.5z^2-0.2z}{z^2-0.1z-0.06} \tag{2.71}$$

$$= \frac{1.5-0.2z^{-1}}{1-0.1z^{-1}-0.06z^{-2}} \tag{2.72}$$

使用式（2.70），有

$$Y(z) = \frac{0.85+0.1z^{-1}}{1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2}} + \frac{1.5-0.2z^{-1}}{(1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2})(1-0.1z^{-1}-0.06z^{-2})} \tag{2.73}$$

我们图示了使用 MATLAB 函数 conv 寻找 $Y_{0i}(z)$ 分母中两个多项式的乘积的方法。

```
den2 =conv(d1,d2)
```

其中行向量的条目 d1 和 d2 是两个多项式（$1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2}$）和（$1-0.1z^{-1}-0.06z^{-2}$）按 z^{-1} 升幂排列的系数。

因此，使用下列 MATLAB 语句通过卷积寻找其乘积的系数：

```
d1 =[1  -0.4  -0.05];
d2 =[1  -0.1  -0.06];
den2 =conv(d1,d2).
```

MATLAB 给出向量 den2 = [1.00　-0.50　-0.07　0.029　0.003]。

例 2.22

介绍三个 MATLAB 函数 residuez、impz 和 filter，在离散时间系统的时域分析中它们是非常有用的：

```
[r,p,k] =residuez(num,den)
```

这个函数给出了 z 变换的部分分式扩展

$$Y(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{2.74}$$

以形式

$$k_1 + k_2 z^{-1} + k_3 z^{-2} + \cdots + \frac{r(1)}{1-p(1)z^{-1}} + \frac{r(2)}{1-p(2)z^{-1}} + \cdots + \frac{r(N)}{1-p(N)z^{-1}} \quad (2.75)$$ [⊖]

可以表达为更熟悉的形式：

$$k_1 + k_2 z^{-1} + k_3 z^{-2} + \cdots + \frac{r(1)z}{z-p(1)} + \frac{r(z)z}{z-p(2)} + \cdots + \frac{r(N)z}{z-p(N)}$$

向量 num = [$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \cdots b_M$]和向量 den = [$1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \cdots a_N$]列出了按 z^{-1}升幂排列的分子多项式和分母多项式的系数。在输出中，向量 r 和 p 列出了余数和相应的极点，而 k 是当 $M>N$ 时存在的增益常数向量。如果极点 $p(j)$ 是 m 重解的，则部分分式扩展将以下列形式显示各项

$$\frac{r(j)}{[1-p(j)z^{-1}]} + \frac{r(j+1)}{[1-p(j)z^{-1}]^2} + \frac{r(j+2)}{[1-p(j)z^{-1}]^3} + \cdots + \frac{r(j+m-1)}{[1-p(j)z^{-1}]^m} \quad (2.76)$$

在得到部分分式扩展后，可以为其每一项求解逆 z 变换来得到所有 $n \geqslant 0$ 时的 $y(n)$。这是寻找离散时间系统响应的一种方法。

不使用这一过程，我们可以使用 MATLAB 函数 impz 得到响应 $y(n)$，但是这一过程仅能在有限数目的采样点 $n=0$, 1, 2, 3, …, K 上给出响应 $y(n)$的值。

```
[y,T] =impz(num,den,K)
```

在这个函数中，列向量 $T=[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad K]$和列向量 y 给出了逆 z 变换 $Y(z^{-1})=y(n)$的 K 个采样。随后可以使用函数 stem（T、y）绘制 $y(n)$的采样。如果只使用命令 impz（num、den、K），没有输出参数，将会立即得到 $y(n)$的曲线。

第三个 MATLAB 函数是 filter，当输入是有限序列 $x(n)$时，它给出了带有传递函数 $H(z^{-1})$的系统输出 $y(n)$：

```
y =filter(num,den,x)
```

因此，除了 $H(z^{-1})$的 num 和 den 系数向量之外，我们以行向量 x 的形式输入系统输入的采样。当向量 x 是 1 时，输出向量 y 显然是单位采样响应 $h(n)$。这个函数甚至允许寻找给定初始状态时的输出，如果使用

```
[y, F] =filter(num, den, x, I0)
```

其中 I_0是列出了初始条件的向量，F 是终值。重要的是要知道，尽管传递函数 $H(z^{-1})$是零状态响应的 z 变换，函数 filter 实现了基于传递函数的递归算法，并且可以寻找给定初始状态时的总响应。所以这个函数在数字信号处理应用中是更有用的。

⊖ 式（2.75）左侧第3项，原书为 $k_2 z^{-2}$，有误。——译者注

例 2.23

考虑在式（2.73）中找到的零输入函数的 z 变换：

$$Y_{0i}(z^{-1})=\frac{0.85+0.1z^{-1}}{1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2}} \tag{2.77}$$

为了寻找部分分式扩展，使用下列 MATLAB 脚本：

```
num=[0.85 0.1];
den=[1  -0.4  -0.05] ;
[r,p,k]=residuez(num,den)
```

得到：

$$r=\begin{matrix}0.8750\\-0.0250\end{matrix}$$
$$p=\begin{matrix}0.5000\\-0.1000\end{matrix}$$
$$k=[\ ]$$

因此，部分分式扩展为 $Y_{0i}(z^{-1})=0.8750z/(z-0.5)-0.025z/(z+0.1)$。因此，零输入响应 $y_{0i}(n)=[0.8750(0.5)^n-0.025(-0.1)^n]u(n)$。

例 2.24

为了直接由式（2.77）寻找零输入响应 y_{0i}（n）的 20 个样本，在下列脚本中使用函数 impz：

```
num=[0.85 0.1];
den=[1  -0.4  -0.05];
[y,T]=impz (num,den,20)
```

得到输出 $y_{0i}(n)$的采样为

$$y=\begin{matrix}0.8500\\0.4400\\0.2185\\0.1094\\0.0547\\0.0273\\0.0137\\0.0068\\0.0034\\0.0017\\0.0009\\0.0004\end{matrix}$$

0.0002
0.0001
0.0001
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

例 2.25

作为第二个例子，考虑式（2.73）中零状态响应的 z 变换 $Y_{0s}(z^{-1})$，使用以下 MATLAB 程序寻找部分分式扩展：

$$Y_{0s}(z^{-1})=\frac{1.5-0.2z^{-1}}{(1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2})(1-0.1z^{-1}-0.06z^{-2})}$$

```
d1 =[1  -0.4  -0.05];
d2 =[1  -0.1  -0.06];
den2 =conv(d1,d2);
num =[1.5  -0.2];
[r,p,k] =residuez(num,den2)
```

由程序得到的输出为

r =1.6369
-0.5625
0.5714
-0.1458
p =0.5000
0.3000
-0.2000
-0.1000
k = [ ]

因此，部分分式扩展由下式给出

$$Y_{0s}(z^{-1})=\frac{1.6369z}{z-0.5}-\frac{0.5625z}{z-0.3}+\frac{0.5714z}{z+0.2}-\frac{0.1458z}{z+0.1} \tag{2.78}$$

零状态响应为：

$$y_{0s}(n)=[1.6369(0.5)^n-0.5625(0.3)^n+0.5714(-0.2)^n-0.1458(-0.1)^n]u(n)$$

例 2.26

使用函数 filter 寻找零状态响应，选择有限长度的输入，比如说，10 个样本

$$x(n)=[(-0.2)^n+0.5(0.3)^n] \quad n=0,1,\cdots,9$$

使用下列脚本：

```
n = (0:9);
x = [ ( -0.2).^n +0.5* (0.3).^n];
y = filter(b,a,x)
```

输出 $y_{0s}(n)$ 为

y = 列 1 - 7：

1.5000　0.5500　0.3800　0.1850　0.0987　0.0496　0.0252

列　8 - 10：

0.0127　0.0064　0.0032

计算从部分分式扩展方法中得到的响应的 10 个样本：

$$y_{0s}(n)=[1.6369(0.5)^n-0.5625(0.3)^n+0.5714(-0.2)^n-0.1458(-0.1)^n]$$

$n=0,1,2,\cdots 9$，使用下面的程序发现结果与通过 filter 函数得到的结果是一致的：

```
n=(0:9);
y=[1.6369*(0.5).^n-0.5625*(0.3).^n+0.5714*(-0.2). ^n-0.1458*(
  -0.1).^n]
```

输出为

y = 列 1 - 7：

1.5000　0.5500　0.3800　0.1850　0.0986　0.0496　0.0252

列　8 - 10：

0.0127　0.0064　0.0032

例 2.27

现在验证从函数 impz 得出的结果与上述结果是否一致。使用这个脚本

```
d1 = [1  -0.4  -0.05];
d2 = [1  -0.1  -0.06];
den2 = conv(d1,d2);
num = [1.5  -0.2];
[y,T] = impz(num,den2)
```

得到以下结果，它与从前面两种方法中得到的结果也是一致的：

y = 1.5000
　　0.5500
　　0.3800

0.1850
0.0986
0.0496
0.0252
0.0127
0.0064
0.0032
0.0016
0.0008
0.0004
0.0002

例 2.28

使用函数 filter 寻找单位冲激响应 $h(n)$，我们确定式（2.73）中的传递函数 $H(z^{-1})$ 为 $1/(1-0.4z^{-1}-0.05z^{-2})$。

从 MATLAB 程序

```
b=[1];
a=[1  -0.4  -0.05];
[r,p,k]=residuez(b,a),
```

得到

$r = 0.8333$
0.1667
$p = 0.5000$
-0.1000
$k =$ [ ]

根据这个数据输出，将传递函数表达为

$$H(z^{-1}) = \frac{0.8333z}{z-0.5} - \frac{0.1667z}{z+0.1}$$

系统的单位冲激响应为

$$h(n) = [0.8333(0.5)^n - 0.1667(-0.1)^n]u(n)$$

为了使用函数 impz 寻找单位冲激响应，使用

```
b=[1];
a=[1  -0.4  -0.05];
[y,T]=impz(b,a,20)
```

得到

$y = 1.0000$

0. 4000
0. 2100
0. 1040
0. 0521
0. 0260
0. 0130
0. 0065
0. 0033
0. 0016
0. 0008
0. 0004
0. 0002
0. 0001
0. 0001
0. 0000
0. 0000
0. 0000
0. 0000
0. 0000

例 2. 29

为了使用 filter 函数得到同样的结果，使用 $x=$ [1 zeros (1, 19)]，它创建了一个向量 [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]：

```
b=[1 0 0];
a=[1 -0.4 -0.05];
x=[1 zeros(1,19)];
y=filter(b,a,x)
```

输出是

y = 列 1 – 7：

1. 0000 0. 4000 0. 2100 0. 1040 0. 0521 0. 0260 0. 0130

列 8 – 14：

0. 0065 0. 0033 0. 0016 0. 0008 0. 0004 0. 0002 0. 0001

列 15 – 20：

0. 0001 0. 0000 0. 0000 0. 0000 0. 0000 0. 0000

例 2. 30

现在考虑当传递函数有多个极点时使用函数 residuez。从式（2.44）和式（2.45）中选择 $G(z)$，将其化简为如式（2.80）所示的按 z^{-1} 降幂排列的有理函数：

$$G(z)=\frac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

$$G(z)=\frac{-2z}{(z-2)^3}+\frac{-z}{(z-2)^2}+\frac{3z}{z-2}+\frac{-3z}{z-1} \tag{2.79}$$

$$=\frac{2z^3-11z^2+12z}{z^4-7z^3+18z^2-20z+8}$$

$$=\frac{2z^{-1}-11z^{-2}+12z^{-3}}{1-7z^{-1}+18z^{-2}-20z^{-3}+8z^{-4}} \tag{2.80}$$

用于得到部分分式扩展的程序为

```
b=[0 2 -11 12];
a=[1 -7 18 -20 8];
[r,p,k]=residuez(b,a)
```

下面是得到的输出数据：

$$\begin{aligned}r=&3.0000+0.0000i\\&0.5000-0.0000i\\&-0.5000\\&-3.0000\\p=&2.0000+0.0000i\\&2.0000-0.0000i\\&2.0000\\&1.0000\\k=&[\ ]\end{aligned}$$

根据这些数据构建的部分分式扩展为

$$G_1(z)=\frac{3}{1-2z^{-1}}+\frac{0.5}{(1-2z^{-1})^2}-\frac{0.5}{(1-2z^{-1})^3}-\frac{3}{1-z^{-1}}$$

它可以化简为等效表达式

$$G(z)=\frac{3z}{z-2}+\frac{0.5z^2}{(z-2)^2}-\frac{0.5z^3}{(z-2)^3}-\frac{3z}{z-1}$$

这不同于式（2.45）或式（2.79）中所示的部分分式扩展。但是，让我们将其扩展为

$$\frac{0.5z^2}{(z-2)^2}=\frac{z}{(z-2)^2}+\frac{0.5z}{(z-2)}$$

$$和\ -\frac{0.5z^3}{(z-2)^3}=\frac{-2z}{(z-2)^3}-\frac{2z}{(z-2)^2}-\frac{0.5z}{z-2}$$

在 $G(z)$ 之前的形式中替代这些表达式，得到

$$G(z)=\frac{-2z}{(z-2)^3}-\frac{z}{(z-2)^2}+\frac{3z}{z-2}-\frac{3z}{z-1}$$

这与式（2.79）中得到的形式完全相同。

例 2.31

我们可以使用 MATLAB 函数 deconv（b，a）来寻找传递函数逆 z 变换的几个值，它基于式（2.67）中给出的递归公式。让我们选择传递函数 $\frac{0.1+0.25z^{-1}}{1+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}}$ 来示例 MATLAB 函数 deconv（b，a）的用法。

```
% MATLAB 程序用于寻找逆 z 变换的几个采样
b =[0.1 0.25 0];
a =[1 0.4 0.5];
n =5;
b = [b zeros(1, n -1)];
[x,r] =deconv(b,a)
```

其中

$$x=0.1000\quad 0.2100\quad -0.1340\quad -0.0514$$
$$r=0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.0876\quad 0.0257$$

从这些输出数据，得到

$$X(z)=\frac{0.1+0.25z^{-1}}{1+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}}$$
$$=0.1+0.21z^{-1}-0.134z^{-2}-0.0514z^{-3}+\frac{0.0876z^{-4}+0.0257z^{-5}}{1+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

因此，得到 $x_0=0.1$，$x_1=0.21$，$x_2=-0.134$，$x_3=-0.0514$，这与由长除法通过手工计算得到的结果是一致的。需要注意的是，向量 b 必须通过上述程序中的（$n-1$）个零点进行扩展，正如 Ifeachor 和 Jervis 在文献［6］指出的。

学生可能会发现在他们分析离散时间系统时了解附加的 MATLAB 函数是有用的，除此之外也可以将其用于上述的实例中。给定一个零向量，通过函数 poly 可以得到具有这些零点的多项式系数。作为零点输入的复数必须伴随其共轭一同出现以便使参数为实数。在行向量中给出多项式的系数，其零点由函数 roots 找到。通过函数 zplane 在 z 平面中绘制有理函数 $F(z)$ 的极点和零点。另外学生可能感兴趣的两个函数是 tfdata 和 tf。键入命令 help poly、help roots、help zplane、help tfdata 和 help tf，将显示这些命令的使用细节。当在命令窗口中键入 help

signal 是会显示信号处理工具箱中可用的所有 MATLAB 函数的列表，这一列表在第9章 MATLAB 入门中也给出。键入 Type functionname 会显示 MATLAB 代码以及函数的帮助手册，其中，functionname 是函数的名称。使用 help 命令，学生会熟悉和精通在分析和处理离散时间系统中完成许多任务时可用的 MATLAB 函数的用法。只有通过尝试 MATLAB 和信号处理工具箱中尽可能多的函数才能熟悉和精通它们的用法，为了达到这一目的，强烈推荐 Ingle 和 Proakis[9] 以及 Mitra[10] 的书籍，除此之外，在本书中也包括了这些函数。

2.10　小结

在本章中，我们描述了线性平移不变离散时间系统建模的几种方法，需要强调的是，我们应该学习如何由一个模型得到另一个模型，这一点适于在系统的时域分析中求解给定问题。本章首先描述了递归算法和卷积和；然后详细讨论了 z 变换的理论和应用，可以用来在时域中寻找系统的响应。在这一过程中介绍了离散时间信号 z 变换的许多特性。在本章中还讨论了一些基本的概念和应用，如：①使用递归算法寻找给定输入和初始条件下的时域输出；②使用 z 变换由线性差分方程（或方程组）寻找离散时间系统的输出（零输入响应、零状态响应、固有响应、强迫响应、瞬态响应、稳态响应等）；③寻找系统的传递函数和单位冲激响应；④借助于卷积和寻找任意输入下的输出。我们还给出了用于从传递函数中得到单输入-输出关系的方法，随后通过将输出的初始条件引入线性差分方程求解零输入和零状态响应。

本章详细讨论了稳定性的概念和检验离散时间系统稳定性的过程，随后描述了有助于类似系统时域分析的许多 MATLAB 函数。在下一章中，将考虑在频域分析这些系统，形成数字滤波器设计的基础。

习题

2.1　给定如下所示的线性差分方程，使用递归算法寻找输出 $y(n)(0\leqslant n\leqslant 5)$

$$y(n)=0.3y(n-1)+y(n-2)+x(n)$$

其中 $y(-1)=1.0$，$y(-2)=0$，$x(n)=(0.1)^n u(n)$。

2.2　通过下述方程描述的 LTI-DT 系统为

$$y(n)=0.3y(n-1)+y(n-2)-0.2y(n-3)+x(n)$$

其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=0$，$y(-3)=2$，$x(n)=(0.5)nu(n)$。使用递归算法寻找输出采样 $y(n)(0\leqslant n\leqslant 5)$。

2.3　通过递归方程描述的 LTI－DT 系统为

$$y(n)=-0.5y(n-1)+0.06y(n-2)+x(n)$$

其中 $y(-1)=0$，$y(-2)=0$，$x(n)=\cos(0.5\pi n)u(n)$。使用递归算法寻找输出 $y(n)(0\leqslant n\leqslant 5)$。

2.4　通过差分方程描述的 LTI－DT 系统为

$$y(n)+0.5y(n-1)+0.06y(n-2)=2x(n)-x(n-1)$$

其中，$y(-1)=1.5$，$y(-2)=-1.0$，$x(n)=(0.2)^n u(n)$。使用递归算法寻找输出采样 $y(4)$。

2.5　习题 2.4 中描述的系统，哪个是（a）零状态响应，（b）零输入响应，（c）固有响应，（d）强迫响应，（e）瞬态响应，（f）稳态响应，和（g）系统的单位冲激响应?

2.6　给定输入序列 $x(-3)=0.5$，$x(-2)=0.1$，$x(-1)=0.9$，$x(0)=1.0$，$x(1)=0.4$，$x(2)=-0.6$，和 $h(n)=(0.8)^n u(n)$，使用卷积和寻找输出 $y(n)$ $(-5\leqslant n\leqslant 5)$。

2.7　使用卷积和 $y(n)=x(n)*h(n)$ 寻找输出 $y(n)$ 的采样 $(0\leqslant n\leqslant 4)$，其中 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1.0}\quad 0.5\quad -0.2\quad 0.4\quad 0.4\}$，$h(n)=(0.8)^n u(n)$。

2.8　给定输入序列 $x(n)=\{-0.5\quad \underset{\uparrow}{0.2}\quad 0.0\quad 0.2\quad -0.5\}$，单位冲激响应 $h(n)=\{\underset{\uparrow}{0.1}\quad -0.1\quad 0.1\quad -0.1\}$，使用卷积和寻找输出 $(0\leqslant n\leqslant 6)$。

2.9　给定输入 $x(n)=(0.5)^n u(n)$ 和 $h(n)=(0.8)^n u(n)$，使用卷积和公式寻找输出 $y(n)(0\leqslant n\leqslant 4)$，并使用 z 变换 $X(z)$ 和 $H(z)$ 的答案进行验证。

2.10　当 $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1.0}\quad 0.5\quad -0.2\quad 0.4\quad 0.4\}$，$h(n)=(0.8)^n u(n)$ 时，使用卷积公式寻找输出 $y(n)(0\leqslant n\leqslant 6)$。

2.11　使用卷积和公式 $y(n)=v(n)*x(n)$ 寻找输出 $y(n)$，其中 $v(n)=(-1)^n u(n)$，$x(n)=(-1)^n u(n)$。

2.12　使用卷积和公式 $y(n)=v(n)*x(n)$ 寻找输出采样 $y(3)$，其中 $x(n)=e^{0.5n}u(n)$，$h(n)=e^{-0.5n}u(n)$。

2.13　当通过 $h(n)=(0.5)^n u(n)$ 定义的 LTI－DT 系统被输入 $x(n)=(0.2)^n(2\leqslant n\leqslant\infty)$ 激励时，使用卷积和寻找输出 $y(5)$。

2.14　给定 $h(n)=(-1)^n u(n)$ 和 $x(n)=\{0.1\quad 0.2\quad \underset{\uparrow}{0.3}\quad 0.4\quad 0.5\quad 0.6\}$，由卷积和寻找 $n=3$ 处的 $y(n)=x(n)*h(n)$ 的值。

2.15　通过 $h(n)=(0.8)^n u(n)$ 定义 LTI 离散时间系统。当给定输入为 $x(n)=\{1.0\quad 0.5\quad -0.5\quad \underset{\uparrow}{0.2}\quad 0.2\quad 0.4\quad 0.6\quad 0.8\}$ 时，使用卷积和寻找输出 $y(n)(n=1,2,3,4)$。

2.16 (a) 当 $x(n)=\{1.0 \quad 0.5 \quad \underset{\uparrow}{0.0} \quad 0.5 \quad 1.0\}$ 与 $h(n)=(-1)^n u(n)$ 进行卷积时，绘制输出 $y(n)(-3\leqslant n\leqslant 3)$ 的曲线。

(b) 当 $x(n)=(-1)^n u(-n+3)$ 与 $h(n)=(-1)^n u(n-2)$ 进行卷积时，绘制输出 $y(n)(-4\leqslant n\leqslant 4)$ 的曲线。

2.17 输入序列 $x(n)=\{1.0 \quad -0.5 \quad \underset{\uparrow}{1.0} \quad -0.5 \quad 1.0 \quad -0.5 \quad 1.0 \quad -0.5\}$，单位冲激响应 $h(n)=\{\underset{\uparrow}{0.1} \quad 0.2 \quad 0.3\}$。使用卷积和公式寻找输出采样 $y(1)$ 和 $y(4)$ 的值。

2.18 证明 $x(n)=(n+1)a^n u(n)$ 的 z 变换是 $X(z)=z^2/(z-a)^2$。

2.19 寻找下列序列的 z 变换：

(a) $x_1(n)=(0.1)^{n-3}u(n)$

(b) $x_2(n)=(0.1)^n u(n-3)$

(c) $x_3(n)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n}\cos(0.5\pi n)u(n)$

2.20 寻找下列两个函数的 z 变换：

(a) $x_1(n)=n(0.5)^{n-2}u(n)$

(b) $x_2(n)=(0.5)^n u(n-2)$

2.21 寻找下列两个函数的 z 变换：

(a) $x_1(n)=-na^n u(-n-1)$

(b) $x_2(n)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$

2.22 寻找下列函数的 z 变换：

(a) $x_1(n)=(-1)^n 2^{-n}u(n)$

(b) $x_2(n)=na^n\sin(\omega_0 n)u(n)$

(c) $x_3(n)=(n^2+n)a^{n-1}u(n-1)$

(d) $x_4(n)=(0.5)^n[u(n)-u(n-5)]$

2.23 证明

$$X(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-(N-1)}=\begin{cases} N & \text{当 } z=1 \text{ 时} \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & \text{当 } z\neq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

2.24 寻找输入 $x(n)=(-1)^n[u(n-4)-u(n-8)]$ 的 z 变换。当由 $h(n)=\{\underset{\uparrow}{1.0} \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.4\}$ 定义的 LTI 离散时间系统被这个 $x(n)$ 激励时，输出 $y(n)(n\geqslant 0)$ 是什么？

2.25 LTI 离散时间系统具有单位冲激响应 $h(n)=(0.1)^n u(n)$。当输入激励是 $x(n)=(n+1)(0.5)^n u(n)$ 时，输出 $y(n)$ 是什么？

2.26 寻找 $H(z)=0.3z+1.0/[(z+0.5)(z+0.2)^2(z+0.3)]$ 的逆 z 变换。

2.27 寻找 $H(z)=0.6z/[(z+0.1)(z-0.5)^3]$ 的逆 z 变换。

2.28 由 $F(z)=(z+0.3)/[z(z+0.5)^2]$ 寻找 $f(n)$。

2.29 寻找 $X(z)=z(z+0.5)/(z^2+0.6z+0.5)$ 的逆 z 变换。

2.30 寻找 $X(z)=(z+0.2)/[(z+0.5)(z-1)(z-0.1)]$ 的逆 z 变换。

2.31 寻找 $Y(z^{-1})=(z^{-1}+0.4z^2)/(1+z^{-1}+0.25z^{-2})$ 的逆 z 变换。

2.32 寻找下列两个传递函数的逆 z 变换：

$$H_1(z)=\frac{z+0.6}{(z^2+0.8z+0.5)(z-0.4)}$$

$$H_2(z)=\frac{(z+0.4)(z+1)}{(z-0.5)^2}$$

2.33 寻找 $H(z)=z/[(z+0.5)^2(z^2+0.25)]$ 的逆 z 变换。

2.34 寻找 $H(z)=[0.1z(z+1)]/[(z-1)(z^2-z+0.9)]$ 的逆 z 变换。

2.35 寻找 $F(z)=(z+0.5)/[z(z^2+0.2z+0.02)]$ 的逆 z 变换。

2.36 寻找下列两个函数的逆 z 变换：

$$G_1(z)=\frac{1+0.1z^{-1}+0.8z^{-2}}{1+z^{-1}}$$

$$G_2(z)=\frac{0.2z^2+z+1.0}{(z+0.2)(z+0.1)}$$

2.37 寻找 $X(z)=(3.0+1.35z^{-1}+0.28z^{-2}+0.03z^{-3})/(1.0+0.5z^{-1}+0.06z^{-2})$ 的逆 z 变换。

2.38 证明 $H(z)=1/[1-2r(\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}]$ 的逆 z 变换由 $h(n)$ 给出。

$$h(n)=\frac{r^n\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}u(n)$$

2.39 证明 $H(z)=z/(z-a)^3$ 的逆 z 变换由 $h(n)$ 给出。

$$h(n)=\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}u(n-2)$$

2.40 给定由

$$y(n)+0.25y(n-2)=x(n-6)$$

描述的 LTI－DT 系统，其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=0$，$x(n)=u(n)$，寻找系统的（a）零状态响应，（b）零输入响应，（c）固有响应，（d）强迫响应，（e）瞬态响应，（f）稳态响应。

2.41 给定由

$$y(n)+0.2y(n-1)+0.2y(n-2)=0.5x(n-1)$$

描述的 LTI－DT 系统，其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=-2$，$x(n)=(-0.3)^nu(n)$，寻找系统的（a）零状态响应，（b）零输入响应，（c）固有响应，（d）强迫响应，（e）瞬态响应，（f）稳态响应。该系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 是什么？

2.42　由差分方程 $y(n)-0.09y(n-2)=u(n)$ 描述的 LTI 离散时间系统，其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=0$。寻找其（a）零状态响应，（b）零输入响应，（c）固有响应（d）强迫响应，（e）瞬态响应，（f）稳态响应，（g）单位脉冲响应。

2.43　给定由

$$y(n)=-0.2y(n-1)+0.3y(n-2)+0.1y(n-3)+0.5x(n)+x(n-1)$$

描述的 LTI 离散时间系统，其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=1$，$y(-3)=2$，$x(n)=(0.5)^n u(n)$，寻找其传递函数 $H(z)$。

2.44　给定由差分方程

$$y(n)+0.6y(n-1)+0.25y(n-2)=x(n)+0.04x(n-2)$$

描述的 LTI 离散时间系统，其中 $y(-1)=0$，$y(-2)=0.4$，$x(n)=(-1)^n u(n)$，寻找系统的（a）固有响应，（b）强迫响应，（c）瞬态响应，（d）稳定响应。

2.45　给定由差分方程

$$y(n)-0.5y(n-1)+0.06y(n-2)=u(n)$$

描述的 LTI－DT 系统，其中 $y(-1)=y(-2)=0$，当它由输入 $x(n)=u(n)$ 激励时，寻找其（a）固有响应，（b）强迫响应，（c）瞬态响应，（d）稳态响应。其单位冲激响应 $h(n)$ 是什么？

2.46　寻找由下列差分方程

$$y(n)+0.25y(n-1)+y(n-2)=(0.5)^n u(n)$$

定义的 LTI－DT 系统的总响应 $y(n)$，其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=-1$。

2.47　寻找由 $y(n)+1.4y(n-1)+0.44y(n-2)=0.5\delta(n-2)$ 给定的 LTI 系统的总响应 $y(n)$，其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=0.5$ 是初始状态。

2.48　对由差分方程

$$y(n)+0.5y(n-1)+0.04y(n-2)=x(n)$$

描述的系统重复习题2.47，其中 $y(-1)=0$，$y(-2)=0$，$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1.0}\quad 0.5\quad -1.0\}$。

2.49　求解下列差分方程 $y(n)$，$(n\geqslant 0)$

$$y(n)+0.6y(n-1)-0.4y(n-2)=2x(n-2)$$

其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=0.5$，$x(n)=(0.1)^n u(n)$。

2.50　给定由差分方程

$$y(n)+0.4y(n-1)+0.04y(n-2)=x(n)-0.5x(n-1)$$

描述的 LTI 离散时间系统，其中 $y(-1)=2$，$y(-2)=2$，$x(n)=(e^{-0.1n})u(n)$，寻找其单位脉冲响应 $h(n)$。

2.51　描述 LTI 离散时间系统的差分方程如下所示。求解 $y(n)$

$$y(n)+0.4y(n-1)+0.03y(n-2)=x(n-2)$$

其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=1$，$x(n)=(0.5)^n u(n)$。

2.52 寻找由下列差分方程描述的离散时间系统的总响应 $y(n)$

$$y(n)-0.3y(n-1)+0.02y(n-2)=x(n)-0.1x(n-1)$$

其中 $y(-1)=0$，$y(-2)=0$，$x(n)=(-0.2)^n u(n)$。

2.53 假定系统由差分方程

$$y(n)-0.04y(n-2)=x(n-1)$$

描述，重复习题2.52，其中 $y(-1)=-0.2$，$y(-2)=1.0$，$x(n)=(0.2)^n u(n)$。

2.54 LTI 离散时间系统由下列差分方程描述

$$y(n)+0.25y(n-2)=x(n-1)$$

其中，$y(-1)=0$，$y(-2)=2$，$x(n)=(0.5)^n u(n)$。计算系统的（a）零状态响应，（b）零输入响应，（c）固有响应，（d）强迫响应，（e）瞬态响应，（f）稳态响应。

2.55 给定由差分方程

$$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)+0.5x(n-1)$$

描述的 LTI 离散时间系统，其中 $y(-1)=2$，$x(n)=(0.5)^n u(n)$，寻找$y(n)$和单位冲激响应 $h(n)$。

2.56 给定数字滤波器的传递函数 $H(z)=z/[(z-1)^2(z+1)]$，计算并绘制 $h(n)(n=0, 1, 2, 3, 4, 5)$的值。$\lim_{n\to\infty} h(n)$为何值?

2.57 给定输入 $X(z^{-1})=1.0+0.1z^{-1}+0.2z^{-2}$和转移函数 $H(z)=z/[(z-0.2)(z+0.3)]$，寻找输出 $y(n)$。

2.58 如果 $y(n)=x(n)*h(n)$的 z 变换是 $X(z)H(z)$，$x(-n)*h(n)$的卷积和公式是什么? $x(-n)*h(n)$的 z 变换是什么?

2.59 给定由差分方程描述的 LTI 离散时间系统

$$y(n)=4\cos(0.4)y(n-1)-4y(n-2)+x(n)$$

当 $x(n)=u(n)$时寻找 $h(n)$和零状态响应。

2.60 推导由图 2.8 电路图描述的 LTI 离散时间系统的传递函数 $H(z)$。

2.61 推导由图 2.9 给出的电路图描述的 LTI - DT 系统的传递函数 $H(z)$。得到与输入 $x(n)$和输出 $y(n)$相关的差分方程。

2.62 推导如图 2.10 所示 LTI - DT 系统差分方程的单输入 - 单输出关系。

2.63 对如图 2.11 所示的离散时间系统得到比例多项式传递函数 $H(z)=Y_3(z)/X(z)$。

2.64 在 z 域写出描述如图 2.12 所示 LTI - DT 系统的方程，并寻找 $Y_2(z)$的 z 变换。

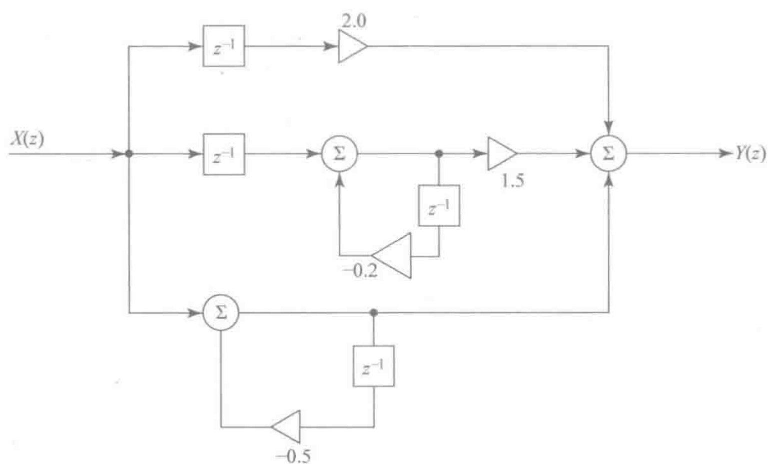


图 2.8　习题 2.60

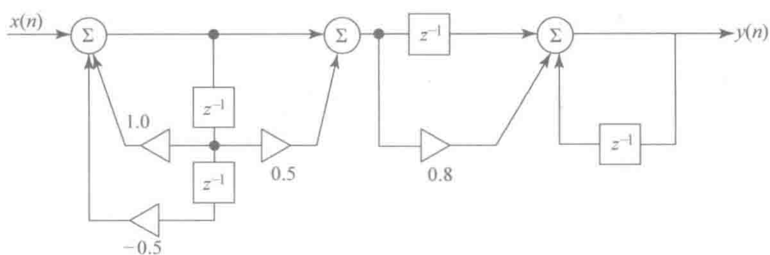


图 2.9　习题 2.61

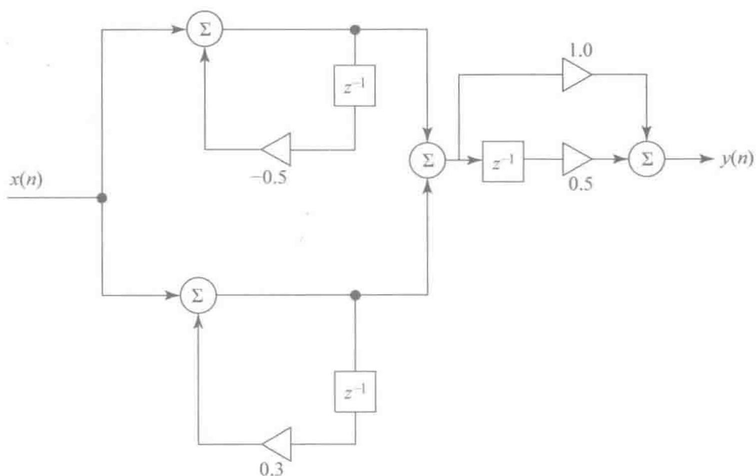


图 2.10　习题 2.62

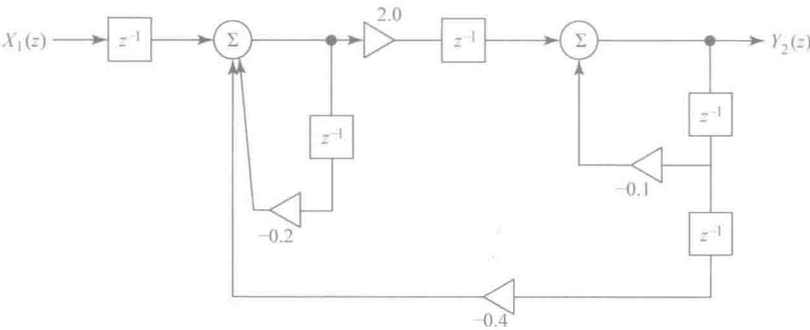


图 2.11 习题 2.63

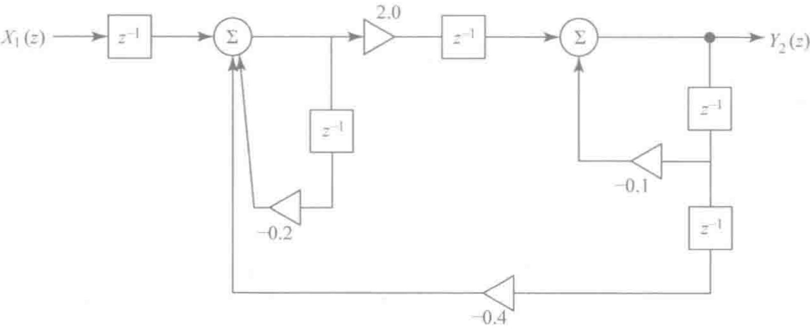


图 2.12 习题 2.64

2.65 推导如图 2.13 所示电路图的传递函数 $H(z)$，并寻找其单位冲激响应 $h(n)$。

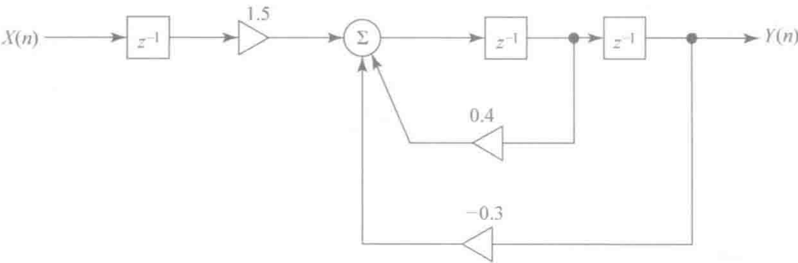


图 2.13 习题 2.65

2.66 写出 z 域方程描述图 2.14 中给出的 LTI – DT 系统，并推导传递函数 $H(z)=Y_3(z)/X(z)$ 作为两个多项式的比的形式。

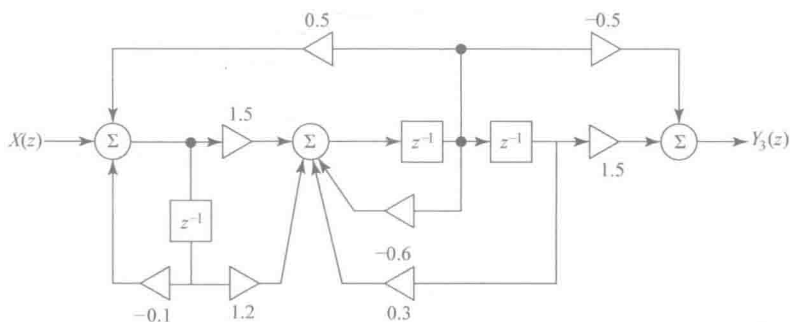


图 2. 14　习题 2. 66

2. 67　对于图 2. 15 给出的电路图重复习题 2. 66。

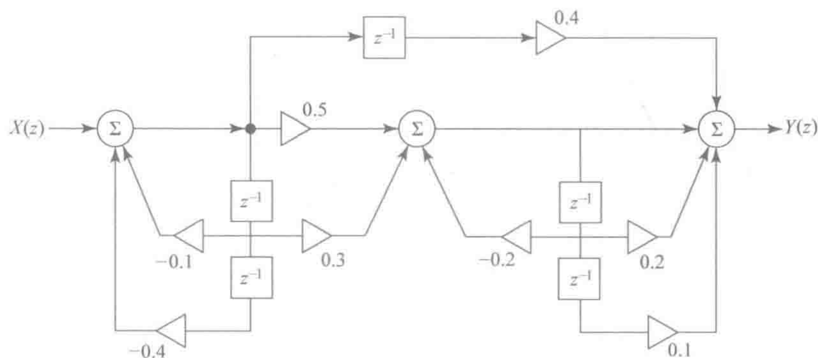


图 2. 15　习题 2. 67

2. 68　寻找如图 2. 16 所示 LTI – DT 系统的单位脉冲响应。

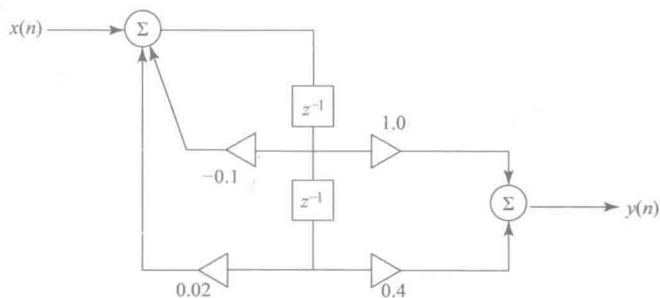


图 2. 16　习题 2. 68

2. 69　寻找如图 2. 17 所示离散时间系统的单位脉冲响应的 $h(n)$。

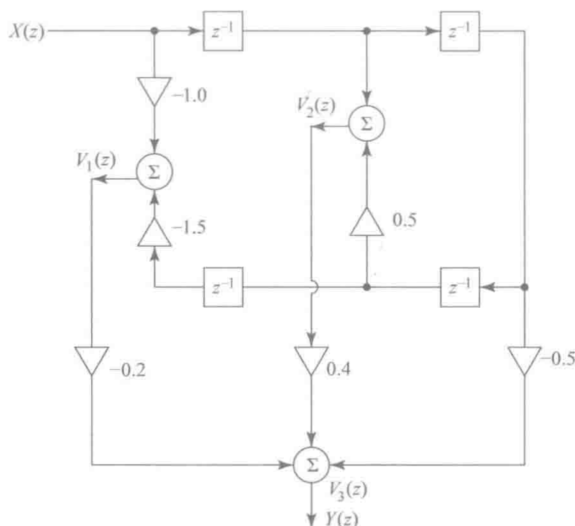


图 2.17 习题 2.69

2.70 寻找图 2.18 给出的离散时间系统的传递函数 $H(z)$。

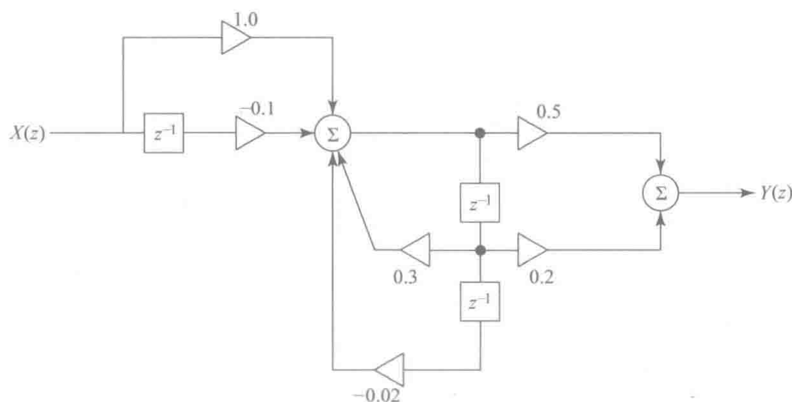


图 2.18 习题 2.70

2.71 推导图 2.19 所示数字滤波器的传递函数并寻找采样 $h(0)$、$h(1)$和 $h(2)$。

2.72 推导图 2.20 所示数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 并寻找其单位冲激响应 $h(n)$。

2.73 寻找图 2.21 所示离散时间系统的单位采样响应 $h(n)$。

2.74 推导如图 2.22 所示 LTI－DT 系统的传递函数 $H(z)=Y(z)/X(z)$。

2.75 滑动平均滤波器定义为

$$y(n) = 1/N\sum_{k=0}^{N-1}y(n-k)$$

当 $N=10$ 时寻找该滤波器的传递函数。

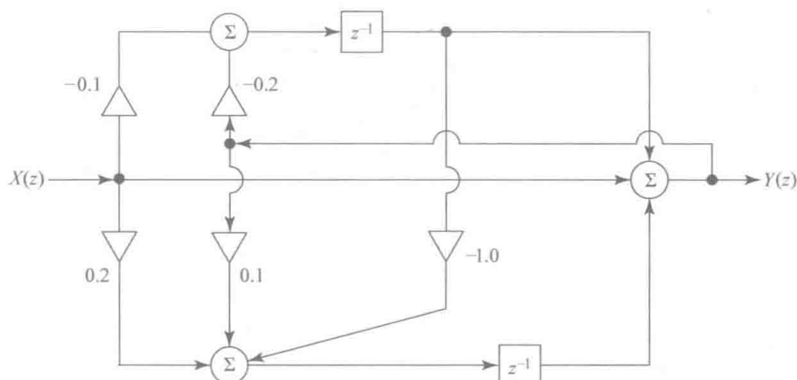


图 2.19　习题 2.71

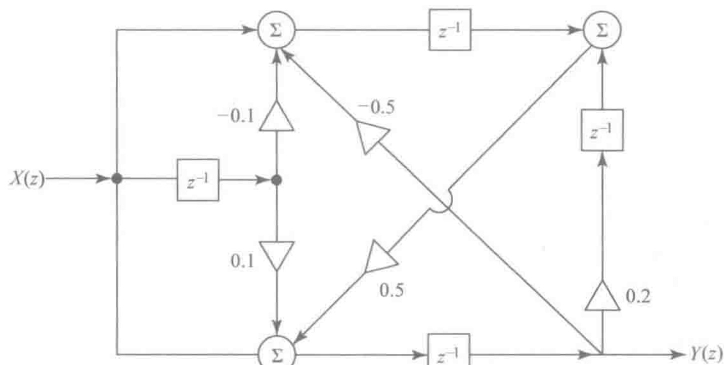


图 2.20　习题 2.72

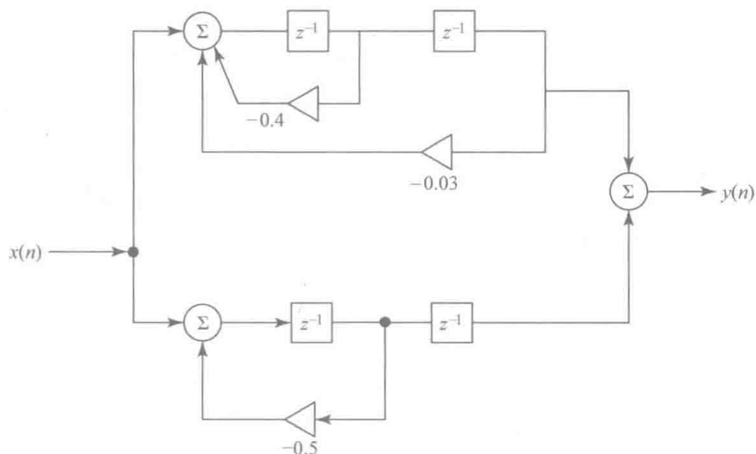


图 2.21　习题 2.73

2.76　在 $H(z)=N(z)/\Pi_{k=1}^{K}(z-z_k)=\sum_{k=1}^{K}R_k/(z-z_k)$ 的部分分式扩展中具有 $z=z_k$ 处的单极点，证明可以从公式 $R_k=N(z_k)/D'(z_k)$ 中找到余数 R_k，其中

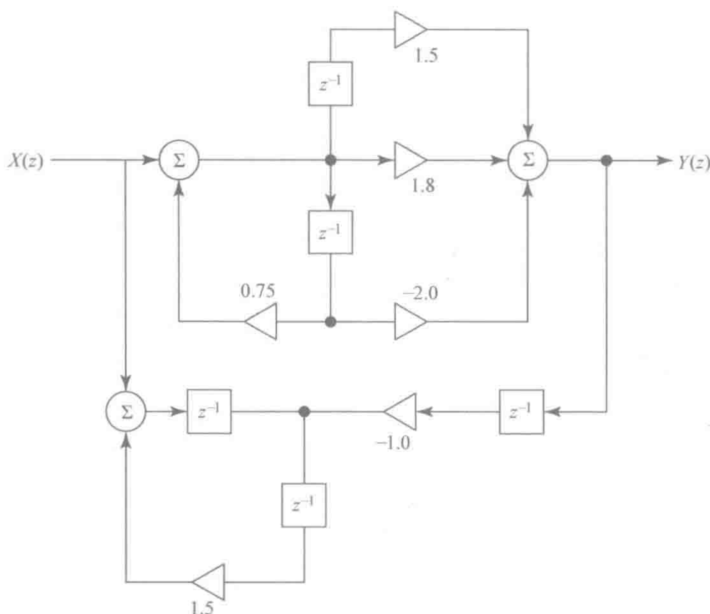


图 2. 22　习题 2. 74

$D'(z) = \mathrm{d}D(z)/\mathrm{d}z$。

2. 77　传递函数 $H(z)$ 扩展为其部分分式形式如下所示：

$$H(z) = \frac{z}{(z-0.1)(z-0.2)(1-0.3z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

$$= \frac{K_1 z}{z-0.1} + \frac{K_2 z}{z-0.2} + \frac{K_3}{1-0.3z^{-1}} + \frac{K_4}{1-0.5z^{-1}}$$ ㊀

寻找 K_1、K_2、K_3、K_4 的值。

2. 78　(a) 如果传递函数 $H(z^{-1})$ 扩展为如下所示的形式，寻找 R_1 和 R_2 的值：

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z^{-1})}$$

$$= \frac{R_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{R_2}{1-0.1z^{-1}}$$

(b) 如果给出通用传递函数的形式为

$$H(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1-a_n z^{-1})} = \sum_{n=1}^{N} \frac{R_n}{1-a_n z^{-1}}$$

寻找余数 R_n 的通用方法是什么？该系统的单位冲激响应 $h(n)$ 是什么？

2. 79　(a) 在下面的表达中，寻找 K_1 和 K_2 的值并寻找 $h(n)$：

㊀ 原书为 R_3 和 R_4，有误，应为 K_3 和 K_4。

$$H(z^{-1})=\frac{1}{(z^{-1}-0.5)(z^{-1}-0.1)}=\frac{K_1}{z^{-1}-0.5}+\frac{K_2}{z^{-1}-0.1}$$

（b）如果给出如下所示形式的传递函数为

$$H(z^{-1})=\frac{N(z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(z^{-1}-a_n)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{K_n}{z^{-1}-a_n}$$

寻找 K_n 的通式是什么?

2.80　给定描述 LTI 离散时间系统的三个差分方程，寻找 $Y_2(z)$

$$y_1(n)=0.1x(n)+0.2y_1(n-1)+0.3y_2(n-2)$$
$$y_2(n)=0.2y_1(n)+0.4y_3(n)$$
$$y_3(n)=y_1(n-1)+y_3(n-1)$$
$$x(n)=\delta(n)$$

2.81　为由传递函数

$$H(z)=\frac{z+0.1}{z^2+0.5z+0.4}$$

描述的离散时间系统输入－输出关系推导线性差分方程。

2.82　为传递函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=\frac{z(z+0.4)}{z^3+0.2z^2-0.4z+0.05}$$

的系统输入－输出关系推导线性差分方程。

2.83　给定 LTI－DT 系统的传递函数为

$$H(z^{-1})=\frac{z^{-1}}{1+0.3z^{-1}+0.02z^{-2}}$$

当输入为单位阶跃函数时寻找零状态响应。满足初始条件 $y(-1)=2$ 和 $y(-2)=4$ 的零输入响应是什么?

2.84　使用 Jury－Marden 检验，确定由下列传递函数定义的离散时间系统是否是稳定的：

$$H(z)=\frac{z+0.5}{z^3+z^2+2z+5}$$

2.85　使用 Jury－Marden 检验确定多项式 $D(z)=2+2z^{-1}+1.7z^{-2}+0.6z^{-3}+0.1z^{-4}$ 在单位圆 $|z|=1$ 内是否具有所有的四个零点。

2.86　使用 Jury－Marden 检验确定多项式

$$Q(z)=2+5z+8z^2+7z^3+2z^4$$

的所有零点是否在单位圆 $|z|=1$ 内。

2.87　使用 Jury－Marden 检验确定多项式

$$P(z)=z^3+2z^2+4z+6$$

的三个零点是否在单位圆 $|z|=1$ 内。

2.88 应用 Jury – Marden 检验确定多项式在 z 平面单位圆内是否具有其零点：

$$R(z) = 1 - 1.5z^{-1} - 0.5z^{-2} + z^{-3}$$

有关 MATLAB 习题

2.89 寻找下列两个多项式的根：

$$N_1(z) = 1 - 0.7z^{-1} + 0.1725z^{-2} + 0.1745z^{-3} - 0.4425z^{-4}$$

$$D_1(z) = 1 + 0.8z^{-1} + 0.8775z^{-2} + 0.4333z^{-3} - 0.1808z^{-4} - 0.6639z^{-5}$$

2.90 绘制传递函数 $H_1(z) = N_1(z)/D_1(z)$ 的极点和零点，其中 $N_1(z)$ 和 $D_1(z)$ 由上述的多项式给出。

2.91 寻找具有下列给出零点的多项式及两个多项式 $N_2(z)D_2(z)$ 的乘积

$N_2(z)$ 的零点 ：-0.2　$0.3 + j0.4$　$0.3 - j0.4$　0.5

$D_2(z)$ 的零点：0.4　0.4　$0.2 + j0.2$　$0.0 - j0.2$

2.92 在 z 平面绘制 $H_2(z) = N_2(z)/D_2(z)$ 的极点和零点。

2.93 使用 MATLAB 函数 residuez 在传递函数 $G(z)$ 的表达式中寻找 R_1、R_2 和 R_3 的值：

$$G(z) = \frac{1 + 0.6z}{(z - 0.8)(z + 0.5)^2} = \frac{R_1 z}{z - 0.8} + \frac{R_2 z}{(z + 0.5)^2} + \frac{R_3 z}{z + 0.5}$$

2.94 使用 MATLAB 函数 residuez 在下列传递函数的表达式中寻找 $K_1 \sim K_5$ 的值：

$$H_1(z) = \frac{(z - 0.3)}{(z - 0.2)^3(z + 0.4)(z + 0.5)}$$

$$= \frac{K_1 z}{(z - 0.2)^3} + \frac{K_2 z}{(z - 0.2)^2} + \frac{K_3 z}{z - 0.2} + \frac{K_4 z}{z + 0.4} + \frac{K_5 z}{z + 0.5}$$

$$H_2(z) = \frac{(z)^2}{(z + 0.5)^2(z + 0.1)^2(z - 0.2)}$$

$$= \frac{K_1 z}{(z + 0.5)^2} + \frac{K_2 z}{z + 0.5} + \frac{K_3 z}{(z + 0.1)^2} + \frac{K_4 z}{z + 0.1} + \frac{K_5 z}{z - 0.2}$$

2.95 绘制下列给定传递函数 $H_1(z^{-1})$ 的幅度、相位和群延迟：

$$H_1(z^{-1}) = \frac{0.20 - 0.45z^{-1}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.75z^{-2}} + \frac{2.1 + 1.45z^{-1}}{1 - 1.07z^{-1} + 0.30z^{-2}} + \frac{1.8 - 0.60z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

2.96 给定 $H_2(z) = (1 - z^{-1})/(1 - 0.9z^{-1})$，绘制 $H_3(z) = H_2(ze^{j1.5})H_2(ze^{-j1.5})$ 的幅度和 $H_4(z) = H_2(ze^{j1.5}) + H_2(ze^{-j1.5})$ 的幅度。

2.97 寻找下列两个传递函数的部分分式扩展并求其 $0 \leqslant n \leqslant 10$ 的单位脉冲

响应：

$$H_1(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-0.8)(z-0.6)}$$

$$H_2(z) = \frac{(z-0.6)}{(z+0.6)(z^2+0.8z+0.9)}$$

2.98　对 $H_3(z)$ 重复习题 2.97 的操作

$$H_3(z) = \frac{(z-0.5)}{(z+0.4)(z+0.2)^2}$$

2.99　分别寻找由先前传递函数 $H_1(z)$ 和 $H_3(z)$ 定义的 LTI - DT 系统的输出 $y_1(n) \sim y_3(n)(0 \leqslant n \leqslant 15)$，假设它们均由输入序列 $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0.5} \quad 0.2 \quad -0.3 \quad 0.1\}$ 激励。

使用 MATLAB 函数 filter 编写代码并将它们与计算机的输出一起提交。

2.100　由下列差分方程描述的 LTI - DT 系统为

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)+y(n-3)=x(n)+3x(n-2)$$

其中 $y(-1)=1$，$y(-2)=2$，$y(-3)=1$，$x(n)=(0.5)^n u(n)$。寻找总响应 $y(n)(0 \leqslant n \leqslant 20)$ 并绘制 $y(n)$。

2.101　寻找 $X_1(z)$ 的脉冲响应 $x_1(n)$，$H_2(z)$ 的脉冲响应 $h_2(n)$ 和 $Y_3(z) = X_1(z)H_2(z)$ 的脉冲响应 $y_3(n)$。将 $x_1(n)$ 的前 9 个采样与 $h_2(n)$ 的前 9 个采样进行卷积并与 $y_3(n)$ 的前 9 个采样比较：

$$X_1(z) = \frac{z}{(z+0.2)(z+0.5)}$$

$$H_2(z) = \frac{z+0.2}{z(z+0.1)}$$

参考文献

1. E. I. Jury, *Theory and Applications of the z-Transform Method*, Wiley, 1964.
2. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing—A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 2001.
3. B. P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press, 1998.
4. A. Antoniou, *Digital Filters, Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, 1993.
5. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
6. E. C. Ifeachor and B. W. Jervis, *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Prentice-Hall, 2002.
7. S. K. Mitra and J. F. Kaiser, eds., *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1993.
8. B. A. Shenoi, *Magnitude and Delay Approximation of 1-D and 2-D Digital Filters*, Springer-Verlag, 1999.

9. V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*$^{(R)}$ *V.4*, PWS Publishing, 1997.
10. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing Laboratory Using MATLAB*, McGraw-Hill, 1999.
11. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.

第3章 频域分析

3.1 简介

在前一章中，通过对连续时间信号 $x_a(t)$ 进行采样周期为 T 的脉冲采样并使用变换 $z=e^{sT}$ 推导了离散时间信号的 z 变换定义。信号 $x_a(t)$ 具有傅里叶变换 $X(j\omega)$ 形式的另一种等价表示。它包含了与 $x_a(t)$ 同等的信息量，因为可以由 $X(j\omega)$ 得到其傅里叶逆变换 $x_a(t)$。当信号 $x_a(t)$ 以采样周期 T 进行采样时，生成了由 $\sum_{k=0}^{\infty} x_a(kT)\delta(nT-kT)$ 表示的离散时间信号，需要回答下面的问题：

在频域有没有离散时间信号的等价表示？

它是否包含了与 $x_a(t)$ 同量的信息？如果是，如何由其采样值 $x_a(nT)$ 重建 $x_a(t)$？

当连续时间系统的单位冲激响应 $h(t)$ 被采样时，傅里叶变换是否代表了系统的频率响应？我们是否可以选择由输入信号或任何其他的考虑确定的采样周期的任意值，或者它是否有限制？

本章将探讨这些问题，得到离散时间系统离散时间傅里叶变换 DTFT）的定义并描述其特性及其应用。在本章的下半部分，将讨论另一种所谓的周期性离散时间信号的离散时间傅里叶级数（DTFS）。这里有被称为离散傅里叶变换（DFT）的第三种变换，它只是 DTFS 的一部分，我们将讨论它的特性及其在信号处理中的应用。在本章的结尾还将讨论使用 MATLAB 求解许多问题或实现一些算法。

3.2 采样理论

首先让我们选择可以由其傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ [1] 表示的连续时间（模拟）函数 $x_a(t)$

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt \tag{3.1}$$

$X_a(j\Omega)$ 的傅里叶逆变换由式（3.2）给出 [2]

---

[1] 本部分内容在出版商 Springer - Verlag 许可下，摘自《1 维与 2 维数字滤波器幅度与延迟近似》。

[2] 我们选择 Ω（以 rad/s 测量）来表示本节中的模拟函数的频率变量，并将选择相同的符号来表示第 5 章中低通、归一化的原型模拟滤波器的频率响应。

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \tag{3.2}$$

现在，通过对 $x_a(t)$ 进行采样周期为 T 的采样生成离散时间序列 $x(nT)$。因此，有 $x(nT)=x_a(t)|_{t=nT}$，在式（3.2）中用 nT 替代 t，可以写出

$$x_a(nT) = x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega \tag{3.3}$$

这个离散时间序列的 z 变换为[㊀]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n} \tag{3.4}$$

在 z 平面单位圆内对其进行求值；因此，当 $z=e^{j\omega T}$ 时，得到

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} \tag{3.5}$$

接下来考虑 $h(nT)$ 作为线性时不变离散时间系统的单位冲激响应，系统的输入 $x(nT)$ 为 $e^{j\omega nT}$。则通过下列卷积得到输出 $y(nT)$：

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(nT-kT)}h(kT) \\ &= e^{j\omega nT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT}h(kT) = e^{j\omega nT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT} \end{aligned} \tag{3.6}$$

注意，通常信号 $e^{j\omega nT}$ 假定在 $-\infty<n<\infty$ 内都有值，而 $h(kT)$ 为因果序列：$h(kT)=0(-\infty<k<0)$。因此，式（3.6）中的求和

$$\sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT}$$

可以替换为

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT}$$

它被表示为 $H(e^{j\omega T})$，是 ω 的复值函数，具有幅度响应 $|H(e^{j\omega T})|$ 和相位响应 $\theta(e^{j\omega T})$。因此有以下结论

$$y(nT) = e^{j\omega nT}|H(e^{j\omega T})|e^{j\theta(e^{j\omega T})} \tag{3.7}$$

这表明，当输入为复指数函数 $e^{j\omega nT}$ 时，输出 $y(nT)$ 的幅度为 $|H(e^{j\omega T})|$，输出 $y(nT)$ 的相位为 $(\omega nT+\theta)$。如果选择正弦输入为 $x(nT)=\mathrm{Re}(Ae^{j\omega nT})=A\cos(\omega nT)$，则输出 $y(nT)$ 是由 $y(nT)=A|H(e^{j\omega T})|\cos(\omega nT+\theta)$ 给出的正弦函数。因此，我们对正弦输入的幅度 $\mathrm{Re}(Ae^{j\omega T})=A\cos(\omega nT)$ 乘以 $H(e^{j\omega T})$，在相位上增加 $\theta(e^{j\omega T})$ 就得到正弦输出的幅度和相位。出于上述的理由，$H(e^{j\omega T})$ 被称为离散时间系统的频率响应。对于任意输入信号 $x(kT)$ 的频率响应，我们使用相似的表达

㊀ 这里我们使用了 DT 序列的双向 z 变换，因为我们假设它定义为 $-\infty<n<\infty$。但是本书没有讨论双边 z 变换的理论。

式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega kT} = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$，称其为 $x(kT)$ 的离散时间傅里叶变换（DTFT）。

为了寻找连续时间函数 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 的傅里叶变换 $X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)$ 和离散时间序列傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$ 之间的关系，我们先从观察 DTFT$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$ 是 ω 的周期函数，周期为 $\omega_{\mathrm{s}}=2\pi/T$ 入手，即 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T+\mathrm{j}r\omega_{\mathrm{s}}T}) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T+\mathrm{j}r2\pi}) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$，其中 r 为任意整数。因此，它可以用傅里叶级数的形式表示为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT} \tag{3.8}$$

其中，系数 C_n 由下式给出

$$C_n = \frac{T}{2\pi}\int_{-(\pi/T)}^{\pi/T} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\mathrm{d}\omega \tag{3.9}$$

通过比较式（3.5）与式（3.8），得出这样的结论：$x(nT)$ 是周期函数 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$ 的傅里叶级数的系数，这些系数由下式进行计算

$$C_n = x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_{-(\pi/T)}^{\pi/T} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT}\mathrm{d}\omega \tag{3.10}$$

因此

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT} \tag{3.11}$$

将包含了 $\Omega=-\infty$ 到 $\Omega=\infty$ 的积分式（3.3）表示为等于一个周期 $2\pi/T=\omega_{\mathrm{s}}$ 的连续积分：

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega \tag{3.12}$$

然而，这个求和式中的每一项都可以通过将变量从 Ω 变为 $\Omega+2\pi r/T$ 化简为 $(-\pi/T)$ 到 π/T 范围内的积分，得到

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-(\pi/T)}^{\pi/T} X_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\Omega+\mathrm{j}\frac{2\pi r}{T}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi rn}\mathrm{d}\Omega \tag{3.13}$$

注意，对于 r 和 n 的所有整数值都有 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi rn}=1$。通过改变求和和积分顺序，可以将方程化简为

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_{-(\pi/T)}^{\pi/T}\left[\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\Omega+\mathrm{j}\frac{2\pi r}{T}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega \tag{3.14}$$

不失一般性，将变量 Ω 的频率改变为 ω，因此得到

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_{-(\pi/T)}^{\pi/T}\left[\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\frac{2\pi r}{T}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT}\mathrm{d}\omega \tag{3.15}$$

比较式（3.10）和式（3.15），得到所需的关系为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{a}}\left(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\frac{2\pi r}{T}\right) \tag{3.16}$$

这表明，通过对连续时间信号 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 进行采样周期为 T 的采样得到的序列

$x(nT)$的离散时间傅里叶变换（DTFT）可以通过对 $x_a(t)$ 的傅里叶变换 $X_a(j\omega)$ 进行周期为 $2\pi/T=\omega_s$ 的周期性复制和按 T 进行比例缩放得到。为了图示这一结论，典型模拟信号 $x_a(t)$ 及其傅里叶变换的幅度显示在图 3.1 中。图 3.2a 中显示了通过采样 $x_a(t)$ 生成的离散时间序列，在图 3.2b 中显示了式（3.16）中几项幅度和 $X(e^{j\omega T})$ 的幅度。

理想情况下，仅当频率趋于∞时 $x_a(t)$ 的傅里叶变换才趋于零。因此可以看到，通常，当如图 3.2b 所示复制并累加 $X_a(j\omega)/T$ 时，在所有频率上会有频率响

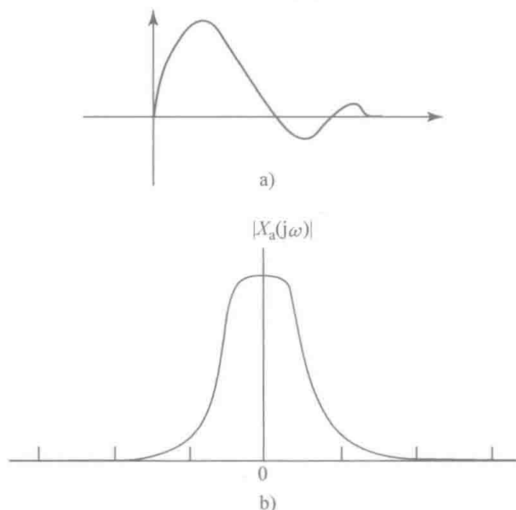


图 3.1 模拟信号 $x_a(t)$ 及其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的幅度

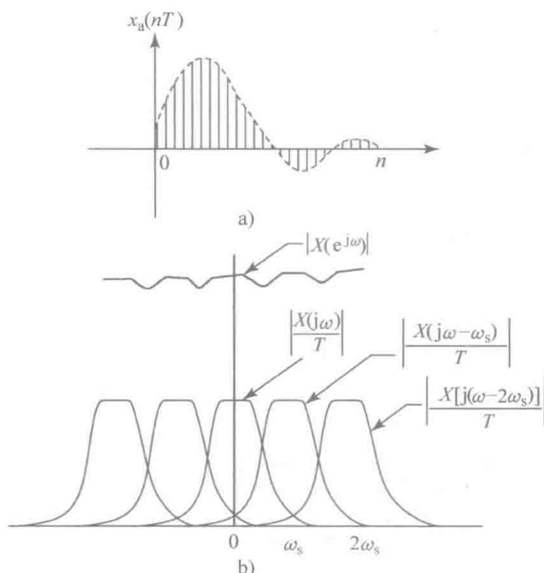


图 3.2 由模拟信号 $x_a(t)$ 和离散时间傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 得到的离散时间信号 $x_a(nT)$

应的重叠。式（3.16）中单独项的频率响应加在一起给出了 $X(e^{j\omega})$ 曲线所示的实际响应。［我们没有考虑 $X(j\omega)$ 的相位影响。］由于这种重叠效应，通常称为混叠，无法通过任何线性操作从 $X(e^{j\omega})$ 中找回 $X(j\omega)$；换句话说，我们失去了采样时包含在模拟函数 $x_a(t)$ 中的信息。当且仅当①假定函数 $x_a(t)$ 是带限的，即如果函数的傅里叶变换 $X_a(j\omega)\equiv 0(|\omega|>\omega_b)$；②选择采样周期 $\omega_s=2\pi/T>2\omega_b$ 时可以避免傅里叶变换的混叠。当模拟信号 $x_b(t)$ 是带限的，如图 3.3a、b 所示，以频率 $\omega_s\geqslant 2\omega_b$ 采样时，得到的离散时间信号 $x_b(nT)$ 及其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 分别如图 3.4a，b 所示。

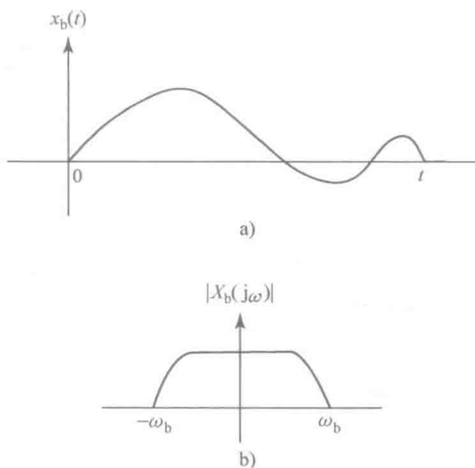


图 3.3　带限模拟信号及其傅里叶变换的幅度

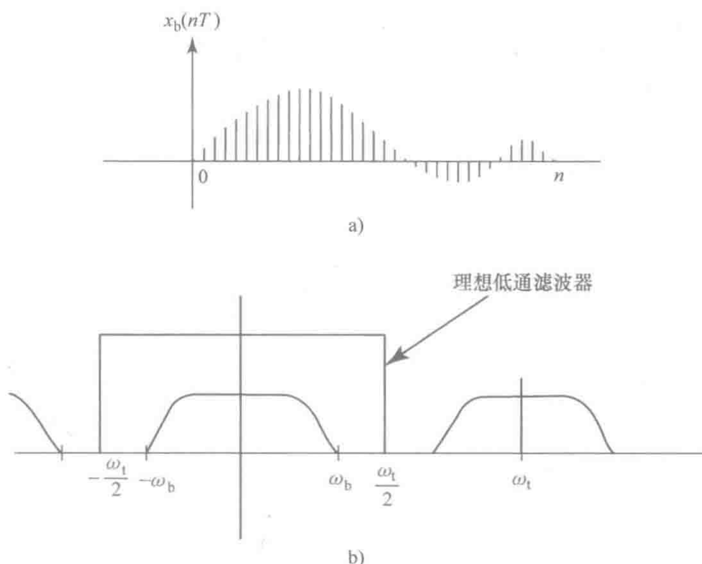


图 3.4　从带限信号得到的离散时间信号及其傅里叶变换的幅度

如果这个带限信号 $x_b(nT)$ 通过带宽为 $\omega_s/2$ 的理想低通滤波器，输出将是傅里叶变换等于 $X(e^{j\omega T})H_{lp}(j\omega)=X_b(j\omega)/T$ 的信号。由 $H_{lp}(j\omega)$ 傅里叶逆变换得到的带宽为 ω_b 的理想低通滤波器的单位冲激响应由下式给出

$$h_{lp}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_{lp}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} T e^{j\omega t} d\omega \tag{3.17}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \tag{3.18}$$

输出信号将是离散输入序列 $x_b(nT)$ 和理想模拟低通滤波器单位冲激响应 $h_{lp}(t)$ 进行卷积的结果。但是，我们没有定义连续时间信号和离散时间序列采样的卷积。实际上它是延迟了的冲激响应 $h_{lp}(t-nT)$ 的响应叠加，由给出了输出 $x_b(t)$ 的采样 $x_b(nT)$ 加权。使用这个观点，香农[2]仅由采样 $x(n)=x_b(nT)$ 推导了重建连续时间函数 $x_b(t)$ 的公式，在这种情况下，$x_b(t)$ 是最高频率为 ω_b 的带限信号，以 $T<\pi/\omega_b$ 的周期进行采样。式（3.19）通常被称为重建公式，这说明，函数 $x_b(t)$ 可以在上述熟知的香农采样定理的条件下由其采样 $x_b(nT)$ 重构：

$$x_b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b(nT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]} \tag{3.19}$$

重建过程如图 3.5a 所示。关于重建的说明也在图 3.5b 中给出，可以看出，延迟了的冲激响应 $\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]/\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]$ 在 $t=nT$ 上具有 $x_b(nT)$ 的值，在其他所有 $t\neq nT$ 的采样时刻贡献了零值，这就使得重建的模拟信号完全插入到

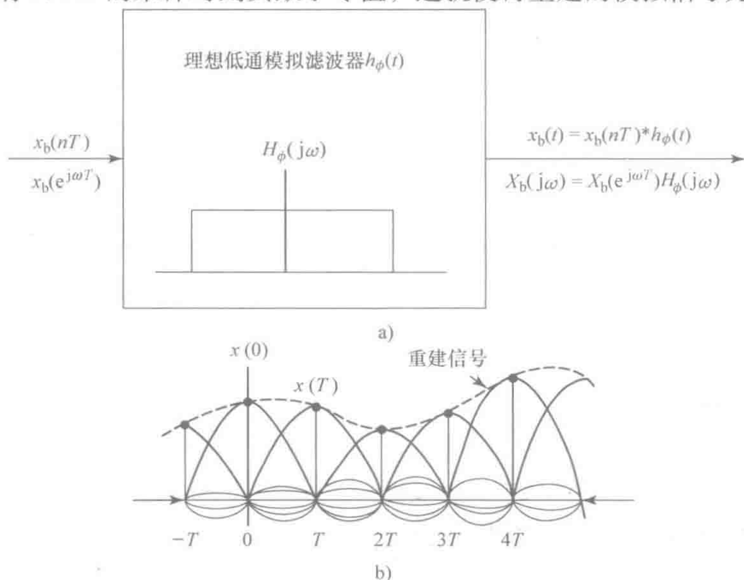


图 3.5 使用理想低通模拟滤波器由其采样重建带限信号

了离散样本的这些采样值之间。

这一革命性的理论表明，如果原始模拟信号 $x_b(t)$ 是带限的，以 $T<\pi/\omega_b$ 的周期进行采样，则采样 $x_b(nT)$ 包含了原始模拟信号所含有的所有信息。它为数字信号处理中的所有研究和开发奠定了必要的基础，有助于我们正在见证的信息技术的惊人进步[⊖]。在实际中，可以将任意给定的信号通过相当高阶的模拟低通滤波器将其表示为近乎带限的信号。实际上，通常的做法是在采样之前将模拟信号通过一个模拟低通滤波器。这类用于预先处理模拟信号的滤波器称为抗混叠滤波器。作为一个实例，众所周知，包含在人类语音中的最大频率大约是3400Hz，因此，采样频率选择为8kHz。在人类语音采样和输入到电话电路之前，让其通过一个在4000Hz上至少衰减了30dB的滤波器。很明显，如果语音信号中有高于4000Hz以上的频率，例如，在4100Hz上，当在4000Hz对其进行采样时，由于采样信号的频谱混叠，将会有4100Hz和3900Hz上的频率。由于这一现象，我们可以说，4100Hz的频率折叠成为了3900Hz，因此将4000Hz的频率称为“折叠频率”。通常，采样频率的一半称为折叠频率（表示为rad/s或Hz）。

在出版文献中有一些关于所谓的奈奎斯特频率定义的含混概念。大多数教材将采样频率的一半定义为奈奎斯特频率，$2f_b$ 为奈奎斯特率，这是为了避免发生混叠所需的最小采样率。因为奈奎斯特率的这一定义，一些作者错误地将 f_b 定义为奈奎斯特频率。在我们的实例中，当信号在8kHz上进行采样时，我们有4kHz的奈奎斯特频率（或折叠频率）和6.8kHz的奈奎斯特率。如果在20kHz对模拟信号进行采样，奈奎斯特频率为10kHz，但奈奎斯特率仍然是6.8kHz。本书中我们将采样频率的一半定义为奈奎斯特频率。一些作家将奈奎斯特频率定义为相应模拟信号的带宽，而一些作者将 $2f_b$ 定义为带宽。

3.2.1 带通信号采样

假设有一个带通模拟信号（即它在频率范围 $\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2$ 之外的傅里叶变换为零）；这个信号的带宽是 $B=\omega_2-\omega_1$，ω_2 是这个信号的最大频率。因此，它是带限的，根据香农采样定理，可以考虑采样频率大于 $2\omega_2$；然而，没有必要将采样频率选择为 $\omega_s\geqslant2\omega_2$，这是为了确保我们可以由其采样值重建这个信号的频率。本章参考文献［3］表明，当 ω_2 是 B 的倍数时，可以由其仅包含了 $\omega_s\geqslant2B$ 采样频率上的采样恢复模拟带通信号。例如，当带通信号具有 $\omega_1=4500$ 和 $\omega_2=5000$ 之间的傅里叶变换时，不必选择 $\omega_s>10000$。我们可以选择 $\omega_s>1000$，因此在本例中 $\omega_2=10B$。

⊖ 作者认为，香农应获奖（如诺贝尔奖），以表彰他对采样理论和信息理论的创新贡献。

例 3.1

考虑连续时间信号 $x_a(t)=e^{-0.2t}u(t)$，傅里叶变换为 $X(\omega)=1/(j\omega+0.2)$。幅度 $|X(j\omega)|=|1/(j\omega+0.2)|=\sqrt{1/(\omega^2+0.04)}$，当选择 200π 的频率时，可以看出，幅度大约是 0.4×10^{-3}。尽管函数 $x_a(t)=e^{-0.2t}u(t)$ 不是带限的，也可以假设它在带宽 200π 上几乎是带限的，选择采样频率为 400πrad/s 或 200Hz。因此采样周期 $T=1/200=0.005$，$\omega_s=2\pi/T=400\pi\text{rad/s}$。为了验证式（3.11）和式（3.16）给出同样的结果，在 $\omega=0.5\text{rad/s}$ 上计算 DTFT。根据式（3.11），$x(nT)$ 的 DTFT 为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-0.2(nT)}e^{-j\omega nT}&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-0.001n}e^{-j\omega n(0.005)}\\&=X(e^{j\omega T})=\frac{1}{1-e^{-0.001}e^{-j(0.005\omega)}}\end{aligned}\tag{3.20}$$

$\omega=0.5\text{rad/s}$ 上的幅度为

$$\left|\frac{1}{1-e^{-0.001}e^{-j(0.0025)}}\right|=371.5765$$

根据式（3.16），这个实例的 DTFT 变为

$$\frac{1}{0.005}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{0.2+j(\omega+k400\pi)}\tag{3.21}$$

在 $\omega=0.5\text{rad/s}$ 处，可以忽略 $jk400\pi$ 上的副本，给出频率响应的幅度为

$$\frac{1}{0.005}\left|\frac{1}{0.2+j0.5}\right|=371.3907$$

$\omega=0.5\text{rad/s}$ 处的两个幅度几乎是相等的；微小的区别是由频率响应中的轻微混叠引起的。参见图 3.6，这说明了这两个方程是等效的。但是，当给定任意值序列（有限或无限长度）时，式（3.16）是没有用的，因为很难猜出被采样的

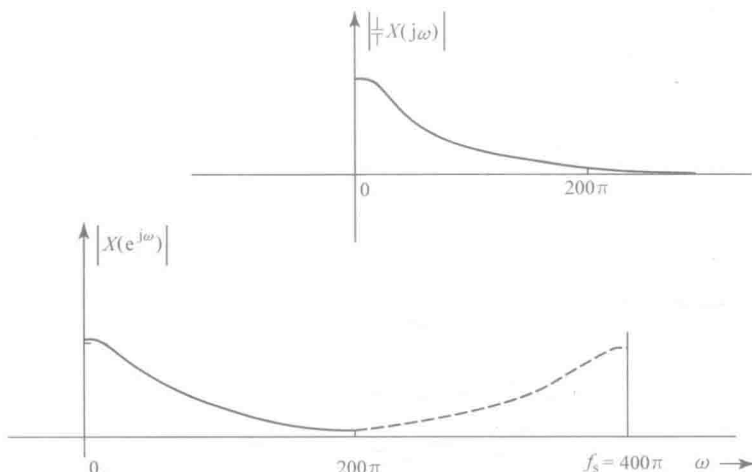


图 3.6 离散时间信号傅里叶变换的两种等效定义

连续时间信号；即使知道连续时间信号，选择采样频率以避免混叠可能是不现实的，例如，当信号是高通信号时。因此，我们参考式（3.11）决定什么时候在讨论中使用缩略的 DTFT。

3.3 DTFT 和 IDTFT

DTFT $X(e^{j\omega})$ 和 IDTFT $x(n)$ 的表达式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{3.22}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{3.23}$$

DTFT 及其逆（IDTFT）广泛地用于离散时间系统的分析和设计中，应用在诸如语音处理、语音合成和图像处理等数字信号处理中。需要记住的是，离散时间信号的频率响应和离散时间傅里叶变换（DTFT）这两个术语是同义的，将会交替使用。这也被称为频谱，其幅度响应和相位响应通常分别被称为幅度谱和相位谱。我们也将同义地使用离散时间信号、离散时间序列、离散时间函数和离散时间级数这些术语。

我们将通过 $H(e^{j\omega T})$ 或者为了方便起见更经常地通过 $H(e^{j\omega})$ 来表示数字滤波器的频率响应。每当将其表示为 $H(e^{j\omega})$ 时——在已发表的文献中这是很常见的做法——频率变量 ω 理解为归一化频率 $\omega T = \omega/f_s$。也可能用 θ（弧度）表示归一化频率 ωT。在图 3.7a 中显示了理想低通滤波器的幅度响应，说明它将传输从 0 到 ω_c 的所有的频率，拒绝高于 ω_c 的频率。频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是周期性的，其幅度是一个偶函数。在图 3.7b 中假设我们只显示低通滤波器在频率区间 [0, π] 内的幅度响应。因为它是一个偶函数，我们画出其 ω 负值的幅度，可以通过重复周期为 2π 对其进行扩展，从而获得（$-\infty$，∞）范围内所有 ω 值的幅度响应。因此，如果给定 [0, π] 区间内的频率指标，我们将知道归一化频率 ω 所有值的指标，通常仅在这个频率区间内给定数字滤波器的指标。注意，我们已经将频率响应绘制为归一化频率 ω 的函数。因此区间 $[0,\pi]$ 对应于实际的频率范围 $[0,\omega_s/2]$，归一化频率 π 对应于奈奎斯特频率（和 2π 对应于采样频率）。

有时，频率 ω 由 πf_s 归一化，使奈奎斯特频率具有 1 的值，例如，在 MATLAB 函数中。在图 3.7c，d 中，显示了理想高通滤波器的幅度响应。在图 3.8 中，显示了理想带通和带阻过滤器的幅度响应。

基于归一化频率可以方便地分析和设计离散时间系统。例如，当滤波器的频率响应显示了归一化频率 0.3π 处的幅度 0.5（即 -6dB）时，实际的频率可以很容易地计算为奈奎斯特频率的30%，当给定采样周期 T 或采样频率 ω_s（或 f_s =

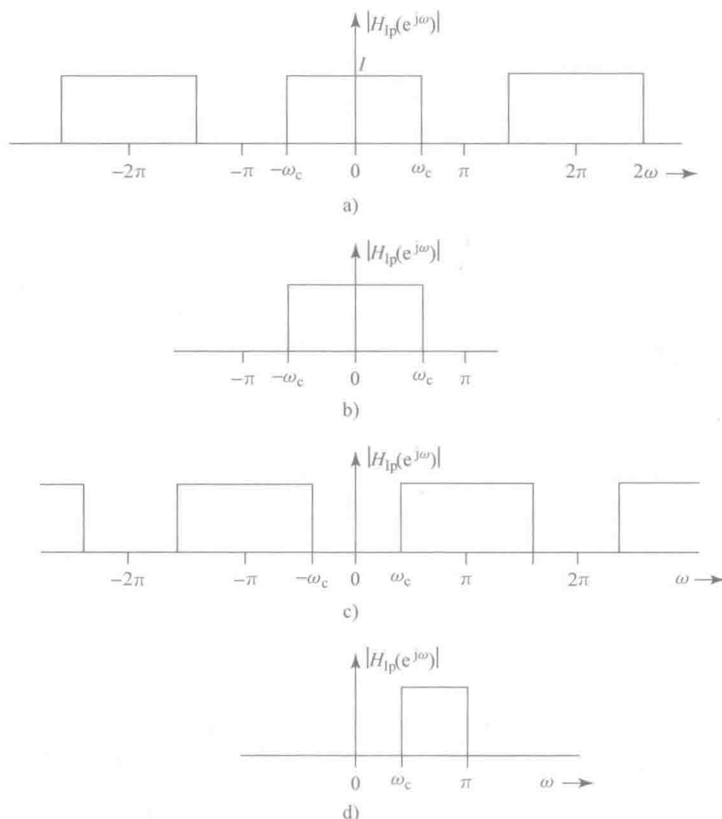


图 3.7 理想低通和高通滤波器的幅度响应

$1/T$)时，我们知道，0.3π 表示(0.3)($\omega_s/2$) rad/s 或(0.3)($f_s/2$) Hz。通过查看曲线，应当能够确定曲线选择的是什么样的频率缩放比例。并且当已知实际的采样周期时，我们知道如何恢复缩放比例并找到以 rad/s 或 Hz 表示的实际频率值。因此，我们将会在下一小节中明确地选择归一化频率。

数字滤波器的任何传递函数都不可能实现图 3.7 和图 3.8 所示的理想滤波器的幅度响应。根据上下文的关系，“设计数字滤波器”这一术语具有不同的含义。一个含义是寻找传递函数 $H(z)$，这样，其幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 尽可能地接近理想幅度响应。提出了不同的逼近标准用于定义如何使 $|H(e^{j\omega})|$ 更接近理想幅度。在图 3.9a 中，显示了符合椭圆函数标准的理想低通滤波器的逼近。它显示了通带和阻带内的误差，在实际中就是等波纹，而在图 3.9b 中通过巴特沃斯类型逼近近似了高通滤波器的幅度，这表明，通带内的幅度是“接近水平”的，从通带开始随着频率的减少单调递减。

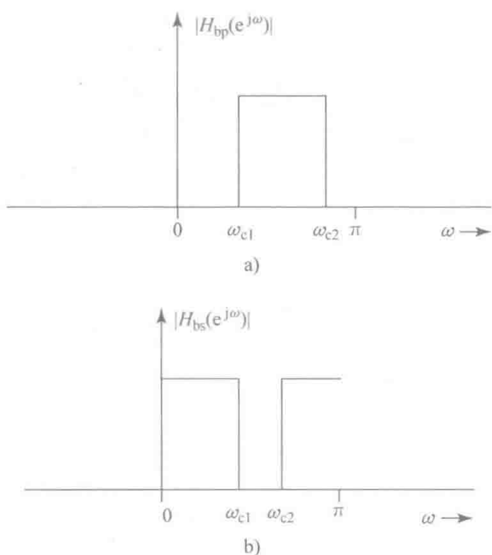


图 3.8 理想带通和带阻滤波器的幅度响应

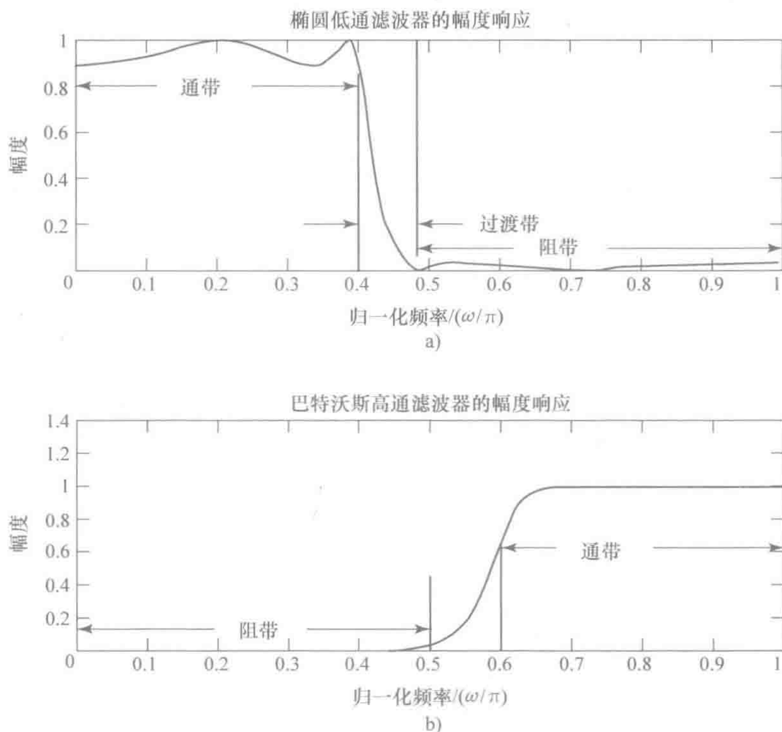


图 3.9 逼近理想低通滤波器和高通滤波器的幅度响应

图 3.10a 图示了理想带通滤波器切比雪夫Ⅰ型逼近，它在通带内具有等波纹误差，在阻带内具有单调衰减响应，而在图 3.10b 中显示了理想带阻滤波器的切比雪夫Ⅱ型逼近；因此，实际中误差在阻带内是等波纹的，在通带内是单调的。这些标准的确切定义和符合这些标准的滤波器设计将在下面两章进行讨论。

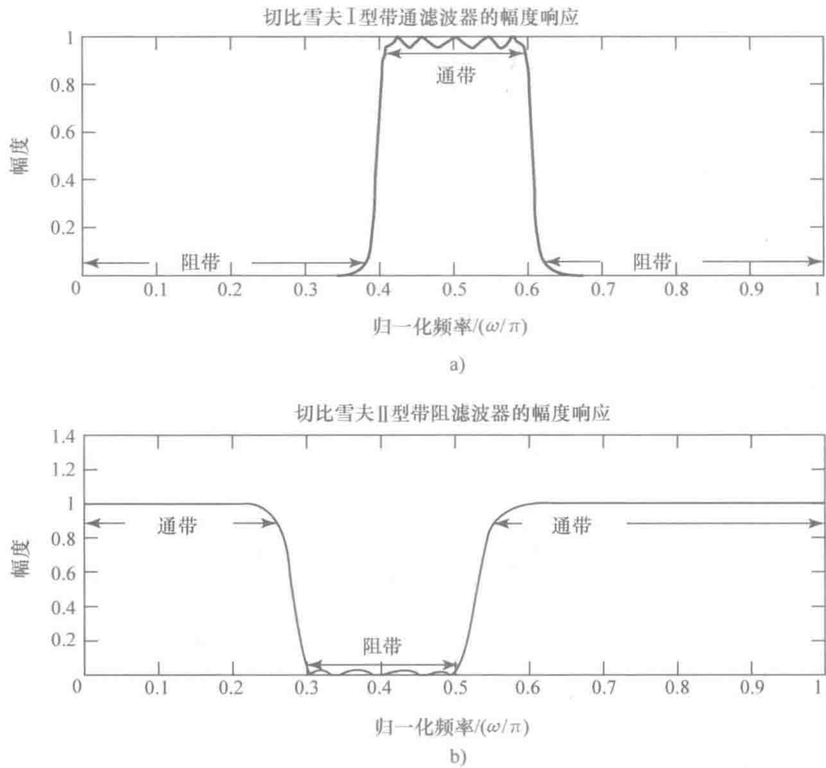


图 3.10 逼近理想带通和带阻数字滤波器

3.3.1 非因果输入的时域分析

令输入信号 $x(n)$ 和离散时间系统的单位冲激响应 $h(n)$ 的 DTFT 分别为 $X(e^{j\omega})$ 和 $H(e^{j\omega})$。由卷积和 $x(n)*h(n)=y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$ 得到输出 $y(n)$，这表明即使当输入信号定义在 $-\infty<n<0$ 或 $-\infty<n<\infty$ 上时，卷积和也是适用的。在这种情况下，不能使用 $x(n)$ 的单边 z 变换。因此无法找到 $X(z)H(z)$ 的逆 z 变换输出 $y(n)$。然而，即使当输入序列定义在 $-\infty<n<\infty$ 上时，也可以找到它的 DTFT，随后将其乘以 $h(n)$ 的 DTFT，得到输出的 DTFT 如 $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$。其 IDTFT 生成了输出 $y(n)$。这是使用离散时间傅里叶变换理论的一个优点。因此，对于时域分析可以看到，当输入信号定义在 $-\infty<n<0$ 或 $-\infty<n<\infty$ 上时，DTFT - IDTFT 变换对比 z 变换方法更具优势。稍后给出的实

例图示在类似情况下其优势所在。

关系式 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 提供了更大的优势，因为它是所有数字滤波器设计的基础。当我们想要在输入信号中消除特定频率或频率区间时，可以设计这样的滤波器，$H(e^{j\omega})$ 的幅度在这些频率或频率区间内非常小，因此形成了阻带。频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的幅度在所有其他的频率上维持在一个较高的水平，这些频率构成了通带。选择滤波器的幅度和相位响应使滤波器输出的幅度和相位响应能改善信息的质量。我们将会在第 4 章和第 5 章中详细地讨论数字滤波器的设计。在下一节中仅给出其应用的一个简单实例。

例 3.2

假设输入信号具有如图 3.11 所示的带宽为 0.7π 的低通幅度响应，我们想要滤除 $\omega_1 = 0.3\pi$ 和 $\omega_2 = 0.4\pi$ 区间以外的所有频率。注意，两个信号的采样频率设置为 2π。如果让输入信号通过通带为 $\omega_1 = 0.3\pi$ 和 $\omega_2 = 0.4\pi$ 之间的带通滤波器，则输出的频率响应由通带在 $\omega_1 = 0.3\pi$ 和 $\omega_2 = 0.4\pi$ 之间的带通响应给出，滤除了其他的所有频率。有趣的是，输出信号中观察到的最大频率为 0.4π；因此，我们可以从采样 $y(n)$ 中重建 $y(t)$，随后以较低的采样频率 0.8π 进行采样，代替原来的采样频率 2π。

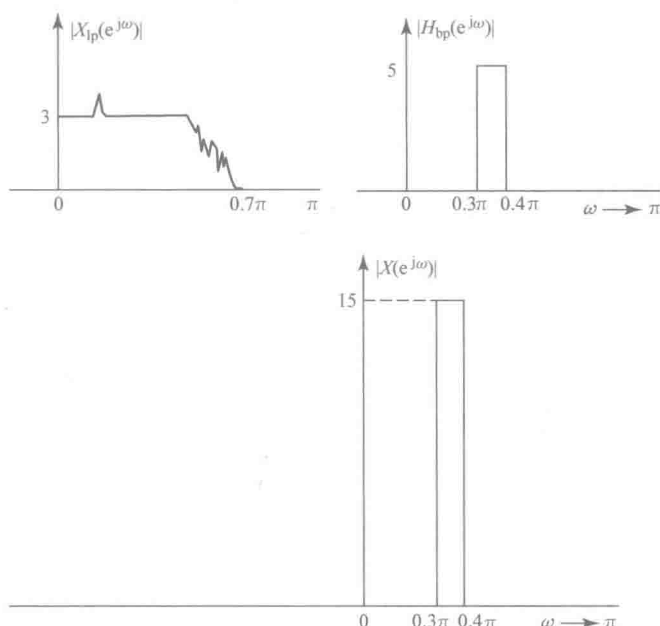


图 3.11 通过带通滤波器处理的低通信号

如果本例中的采样频率为 10000Hz，则奈奎斯特频率是 5000Hz，因此输入信号的带宽为 3500Hz，对应于归一化带宽为 0.7π，而带通滤波器具有 1500～2000Hz 之间的通带。带通滤波器的输出具有 1500～2000Hz 之间的通带。由于输出信号的最大频率是 2000Hz，有人可能会认为要使用 4000Hz 的采样频率重建连续时间信号。但是这是一个带宽为 500Hz 的带通信号，2000Hz 是带宽的 4 倍；根据带通信号的采样定理，可以使用带宽的两倍的采样频率重建输出信号 $y(t)$，即 1000Hz，而不是 4000Hz。由其采样重建模拟带通信号的理论和过程已经超出了本书的范围，将不会继续处理。

3.3.2 时移特性

如果 $x(n)$ 具有 DTFT $X(e^{j\omega})$，则 $x(n-k)$ 具有等于 $e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$ 的 DTFT，其中 k 是一个整数。这就是所谓的时移特性，很容易证明如下：

$$\mathrm{DTFT}[x(n-k)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$$

因此，将这一特性表示为

$$x(n-k) \Leftrightarrow e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$$

3.3.3 频移特性

如果 $x(n) \Leftrightarrow X[(e^{j\omega})]$，则

$$e^{j\omega_0 n}x(n) \Leftrightarrow X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$$

这就是熟知的频移特性，很容易证明如下：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$$

3.3.4 时域反转特性

考虑信号 $x(n)=a^n u(n)$。其 DTFT $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$。接下来，为了找到 $x(-n)$ 的 DTFT，如果用 $-n$ 代替 n，我们会写出 $x(-n)$ 的 DTFT 为 $\sum_{n=0}^{-\infty} a^{-n}e^{j\omega n}$（但这是错误的），如下面的实例所示：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = 1 + ae^{-j\omega} + a^2e^{-j2\omega} + a^3e^{-j3\omega} + \cdots$$

但 $x(-n)$ 的 DTFT 的正确表达式是 $1 + ae^{j\omega} + a^2e^{j2\omega} + a^3e^{j3\omega} + \cdots$ 的形式。

因此，这一序列的紧凑形式是 $\sum_{n=-\infty}^{0} a^{-\infty}e^{-j\omega n}$。

利用这一说明，现在我们证明，如果 $x(n) \Leftrightarrow X(e^{j\omega})$，则

$$x(-n) \Leftrightarrow X(e^{-j\omega}) \tag{3.24}$$

证明：$\mathrm{DTFT}[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$。令$(-n) = m$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-\omega)m} = X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

例 3.3

考虑$x(n)=\delta(n)$。然后，由 DTFT 的定义得到，有$\delta(n)\Leftrightarrow X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=1$，对所有$\omega$。

由时移特性，得到

$$\delta(n-k)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k} \tag{3.25}$$

傅里叶变换$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$在所有频率上具有幅度 1，但有线性相位是$\omega$的函数，它生成了$k$个采样的常数群延迟。如果考虑无限单位冲激序列来扩展这一结果，它可以表示为$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$，其 DTFT 应当得出为$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$。但这并不收敛于任何形式的表达式。因此采取一种如下所述的不同的方法得到结果式（3.28）。

例 3.4

考虑$x(n)=\delta(n+k)+\delta(n-k)$。其 DTFT 由$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}=2\cos(\omega k)$给出。在这个实例中，需要注意的是，DTFT 是连续变量ω的函数，其中k是一个固定数字。这是一个ω的周期为2π的周期函数，因为$2\cos[(\omega+2r\pi)k]=2\cos(\omega k)$，其中$r$是整数。换句话说，$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=2\cos(\omega k)$的逆 DTFT 是在$n=k$和$n=-k$上的一对冲激函数，由下式给出

$$\cos(\omega k)\Leftrightarrow 1/2[\delta(n+k)+\delta(n-k)] \tag{3.26}$$

例 3.5

现在考虑无限长序列$x(n)=1$（对于所有的n）。将其表示为$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$的形式。我们给出以下证明，给出其 DTFT 为$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$，这是一个频域的周期性冲激序列，强度等于$2\pi$，周期等于$2\pi$（是归一化的采样频率）。我们由式（3.27），通过证明$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$的逆 DTFT 等于 1（对于所有的$n$）来证明这个结果。

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\Leftrightarrow 1(\text{对所有 } n) \tag{3.27}$$

证明：$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$的逆 DTFT 计算为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

由频移特性得到

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]e^{j\omega n}=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]e^{j2\pi kn}$$
$$=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]$$

其中对于所有的 n 使用了 $e^{j2\pi kn}=1$，当我们整合 $-\pi\sim\pi$ 的冲激序列时，仅在 $\omega=0$ 处有一冲激信号。

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)\right]e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega=1,\text{对所有 } n$$

因此，我们推导出了下面的重要结果

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)\Leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k) \tag{3.28}$$

为了指出上述结论中的一些对偶性，重复如下：

当 $x(n)=1$，$n=0$ 和 $x(n)=0$，$n\neq 0$ 时，即，当我们有 $\delta(n)$时，其 DTFT $X(e^{j\omega})=1$（对所有的 ω）。

当 $x(n)=1$（对所有的 n）时，尤其是当我们有 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$ 时，其 DTFTX（$e^{j\omega}$）$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$。

使用频移特性，得到下列结论：

$$e^{j\omega_0 n}\Leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) \tag{3.29}$$

从这些结论，我们可以得到下列正弦序列的 DTFT：

$$\cos(\omega_0 n)=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}]\Leftrightarrow\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)$$

$$\sin(\omega_0 n)=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}]\Leftrightarrow\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi k) \tag{3.30}$$

现在比较式（3.28）和式（3.30）中的结论，在式（3.31）和式（3.32）中把它们放在一起是为了显示这两个变换对的对偶特性。特别需要注意的是，$\cos(\omega k)$是离散时间傅里叶变换和 ω 的函数，其中 k 为一固定整数，而 $\cos(\omega_0 n)$ 是离散时间序列，其中 ω_0 固定，并且是 n 的函数：

$$\frac{1}{2}[\delta(n+k)+\delta(n-k)]\Leftrightarrow\cos(\omega k) \tag{3.31}$$

$$\cos(\omega_0 n) \Leftrightarrow \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) \tag{3.32}$$

让我们给出式（3.26）和式（3.29）中推导的其他函数的对偶性：

$\delta(n) \Leftrightarrow 1$（对所有的 ω）

而

$$x(n) = 1(\text{对所有的 } n) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

使用这些函数的时移和频移特性，推导出了下列傅里叶变换对：

$$\delta(n-k) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

例 3.6

选择这个实例是为了强调离散时间序列 $x(n)$ 及其 DTFT $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 表达式之间的区别。因此，如果给出 $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = 10\cos(5\omega) + 5\cos(2\omega) = 5\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega} + 5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega} + 2.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega} + 2.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$，使用结论 $\delta(n-k) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$ 得到其 IDTFT，得到 $f(n) = 5\delta(n+5) + 2.5\delta(n+2) + 2.5\delta(n-2) + 5\delta(n-5)$，绘制在图 3.12 中。显然，它是有四个冲激函数的有限序列，因此它不是周期性的。

如果给出函数 $g(n) = 10\cos(0.5\pi n) + 5\cos(0.2\pi n)$，首先必须意识到，它是

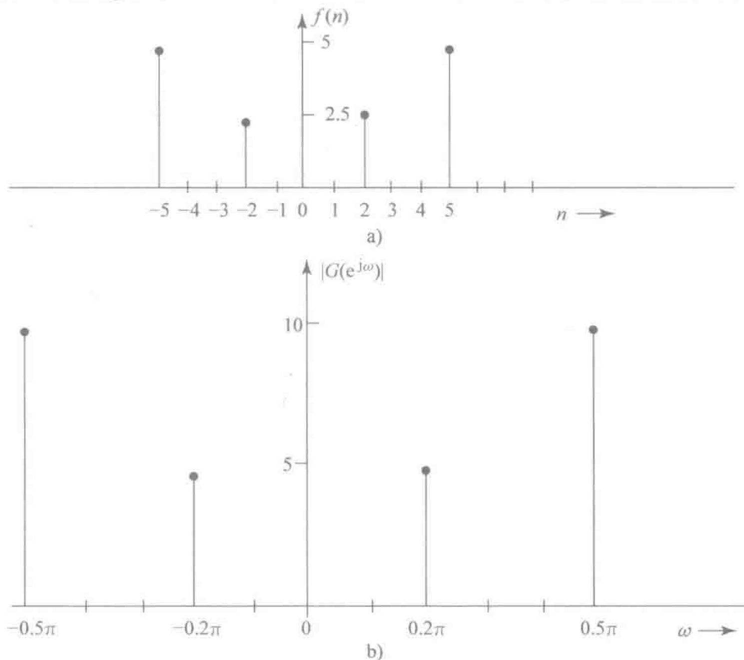


图 3.12 离散时域的冲激序列和离散频域的冲激序列

一个离散时间函数，并且是变量 n 的周期函数。因此，我们使用式（3.30）寻找其 DTFT 为

$$G(e^{j\omega}) = 10\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-0.5\pi-2\pi k)+10\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+0.5\pi-2\pi k)$$
$$+5\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-0.2\pi-2\pi k)+5\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+0.2\pi-2\pi k)$$

这个 DTFT 如图 3.12b 所示。我们注意到，它表示了频域的无穷脉冲，形成了频率变量 ω 的周期函数。因为它具有离散成分，冲激函数因此也被称为 $g(n)$ 的频谱分量。

我们选择 DTFT $F(e^{j\omega})$ 并推导其 IDTFT $f(n)$，这是一个时域的冲激函数序列，如图 3.12a 所示；然后，我们选择离散时间函数 $g(n)$ 并推导其 DTFT $G(e^{j\omega})$，这是一个频域的冲激函数序列，如图 3.12b 所示。

例 3.7

考虑离散时间正弦信号 $x(n)=4\cos(0.4\pi n)$ 的简单实例。当频率（$0.4N$）为一整数或整数比时，它是周期性的。我们选择 $N=5$ 作为这个函数的周期，因此，$x(N)=x(N+5K)=4\cos[0.4\pi(n+5K)]$，其中 K 为任意整数。

重写为 $x(n)=2(e^{j0.4\pi n}+e^{-j0.4\pi n})$，因此其 $X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-0.4\pi-2\pi k)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+0.4\pi-2\pi k)$。它由幅度等于 2π 的冲激函数组成，在频域 $\omega=\pm(0.4\pi+2\pi k)$ 上的周期为 2π。

给定 $f(n)=2\delta(n+4)+2\delta(n-4)$，其 DTFT 为 $F(e^{j\omega})=4\cos(4\omega)$，如果，$x(n)=4\omega_s(0.4\pi n)$ 其 DTFT 为 $x(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-0.4\pi-2\pi k)+2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+0.4\pi-2\lambda k)$。

特别的，选择实例 3.6 和实例 3.7 是为了区分两个傅里叶变换对之间的区别。

例 3.8

让我们考虑更多序列的 DTFT。例如，推导 $x(n)=a^n u(n)$ 的 DTFT 如下：

$$X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n$$

当 $|ae^{-j\omega}|<1$，即当 $|a|<1$ 时，这个无穷级数收敛为 $1/(1-ae^{-j\omega})=e^{j\omega}/(e^{j\omega}-a)$。因此，$(0.4)^n u(n)$ 的 DTFT 为 $1/(1-0.4e^{-j\omega})$，$(-0.4)^n u(n)$ 的 DTFT 是 $1/(1+0.4e^{-j\omega})$。注意，这两项都是因果序列。

如果给定序列 $x_{13}(n)=a^{|n|}$，其中 $|a|<1$，将序列拆分为 0 到 ∞ 的因果序列 $x_1(n)$ 和 $-\infty$ 到 -1 的非因果序列 $x_3(n)$。换句话说，可以表示为 $x_1(n)=a^n u(n)$ 和 $x_3(n)=a^{-n}u(-n-1)$。推导 $x_{13}(n)$ 的 DTFT 为

$$X_{13}(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}=X_1(e^{j\omega})+X_3(e^{j\omega})^{\ominus}$$

⊖ 原书为 $X_{13}(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}X_1(e^{j\omega})+X_3(e^{j\omega})$，有误。

在 $X_{13}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$[1]的第二个求和中用 $-n$ 替代 m，得到

$$\begin{aligned}X_{13}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty}(a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})^n - 1 + \sum_{m=0}^{\infty}(a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^m \\ &= \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} - 1 + \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} + \frac{a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} \\ &= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2} \quad |a|<1\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$a^{|n|} \Leftrightarrow \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2} \quad |a|<1$$

当 $|a|<1$ 时这些结论是有效的。应用时域反转特性，从结论 $a^n u(n) \Leftrightarrow 1/(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$ 中，我们还发现，$x_4(n)=x_1(-n)=a^{-n}u(-n) \Leftrightarrow 1/(1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，而我们已经确定了 $x_3(n)=a^{-n}u(-n-1) \Leftrightarrow a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}/(1-a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。需要注意的是，通过删除 $n=0$ 处的采样 $x_4(n)$，会由 $x_4(n)$ 得到 $x_3(n)$，具体地来说，就是 $x_4(n)-1=x_3(n)$。在上面推导 $X_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的过程中使用了这一结论。图 3.13 中绘制了 $x_{13}(n)$ 序列，而曲线 $x_1(n)$ 和 $x_3(n)$ 分别显示在图 3.14 和图 3.15 中。

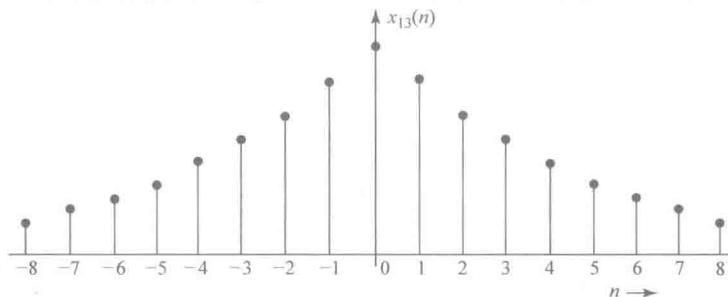


图 3.13 离散时间序列 $x_{13}(n)$

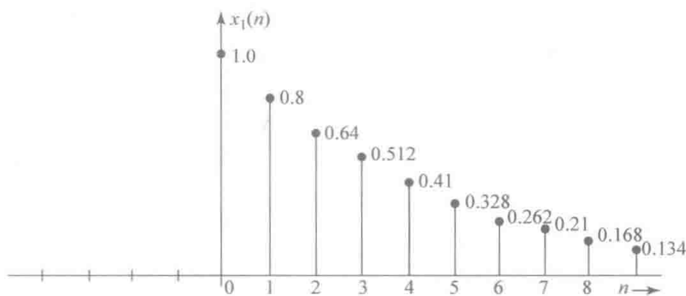


图 3.14 离散时间序列 $x_1(n)$

[1] 原书为 $X_3(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，有误。

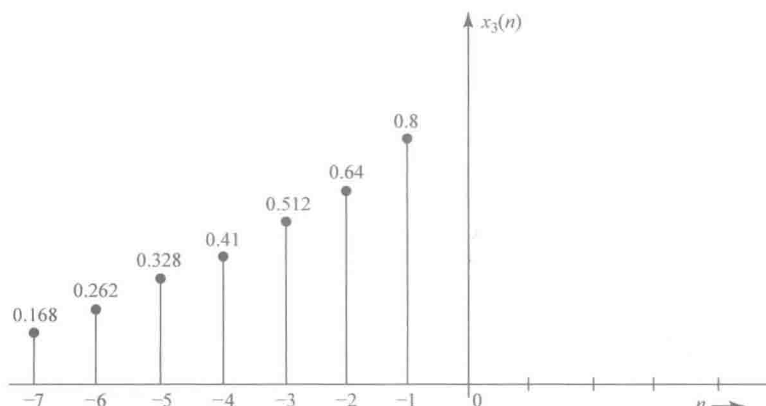


图 3.15 离散时间序列 $x_3(n)$

现在考虑 $x_5(n)=\alpha^n u[-(n+1)]$的情况，其中$|\alpha|>1$。这个序列($\alpha=2$)的曲线显示在图 3.16 中。其 DTFT 推导如下：

$$X_5(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[-(n+1)]e^{-j\omega n}$$
$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{\alpha}e^{j\omega}\right)^{-n}$$

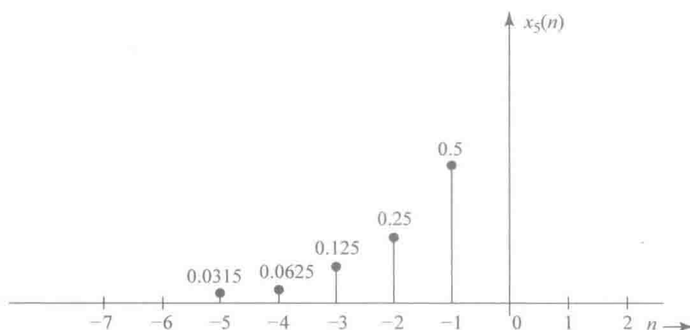


图 3.16 离散时间序列 $x_5(n)$

通过改变变量 $n=-m$，得到

$$X_5(e^{j\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{j\omega}\right)^m = -1+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}e^{j\omega}\right)^m$$
$$= -1 + \frac{1}{1-\left(\frac{1}{\alpha}e^{j\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{\alpha e^{-j\omega} - 1}$$

因此，我们有变换对

$$x_5(n) = \alpha^n u[-(n+1)] \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha e^{-j\omega} - 1} = \frac{e^{j\omega}}{\alpha - e^{j\omega}} \quad |\alpha| > 1 \tag{3.33}$$

在确定这一变换对（3.33）的差别时保持谨慎是很重要的，它在$|\alpha|>1$时是有效的，而先前的变换对于$|\alpha|<1$是有效的。下面给出这些变换对（此外，应当仔细研究和清楚地理解不同DTFT－IDTFT之间的区别和对应的曲线）：

$$x_1(n) = a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} \quad |a| < 1 \tag{3.34}$$

$$x_4(n) = a^{-n} u(-n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega} - a} \quad |a| < 1 \tag{3.35}$$

$$x_3(n) = a^{-n} u(-n-1) \Leftrightarrow \frac{a e^{j\omega}}{1 - a e^{j\omega}} \quad |a| < 1 \tag{3.36}$$

$$x_{13}(n) = x_1(n) + x_3(n) \Leftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2} \quad |a| < 1 \tag{3.37}$$

对于序列$x_5(n)=\alpha^n u[-(n+1)]$，需要注意的是，变换对通过式（3.38）给出，当$|\alpha|>1$时是有效的：

$$x_5(n) = \alpha^n u[-(n+1)] \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha e^{-j\omega} - 1} = \frac{e^{j\omega}}{\alpha - e^{j\omega}} \quad |\alpha| > 1 \tag{3.38}$$

例 3.9

下面给出几个有助于解释这些差别的实例。从上面给出的结果中我们看到：

1）如果 DTFT $X_1(e^{j\omega})=1/(1-0.8e^{-j\omega})$，其 IDTFT 为$x_1(n)=(0.8)^n u(n)$。

2）$X_3(e^{j\omega})=0.8e^{j\omega}/(1-0.8e^{j\omega})$的 IDTFT 由 $x_3(n)=(0.8)^{-n}[u(-n-1)]$给出。

3）$X_4(e^{j\omega})=1/(1-0.8e^{j\omega})$的 IDTFT 为 $x_4(n)=(0.8)^{-n}u(-n)$。但是

4）$X_5(e^{j\omega})=e^{j\omega}/(2-e^{j\omega})$的 IDTFT 为 $x_5(n)=2^n u(-n-1)$。

注意上述实例的差别，尤其是$x_5(n)$的 DTFT－IDTFT 对。

$X_1(e^{j\omega})$、$X_3(e^{j\omega})$和$X_{13}(e^{j\omega})$的幅度和相位响应分别如图 3.17～图 3.19 所示。下面给出的$X_1(e^{j\omega})$、$X_4(e^{j\omega})$、$X_3(e^{j\omega})$的幅度响应除了$X_3(e^{j\omega})$中的比例因子之外是相同的。

如图 3.17 和图 3.18 所示，$X_3(e^{j\omega})$的相位响应超过了$X_1(e^{j\omega})\omega$弧度。频率响应（DTFT）$X_{13}(e^{j\omega})$如图 3.19 所示，它是一个实函数，因此具有零相位。

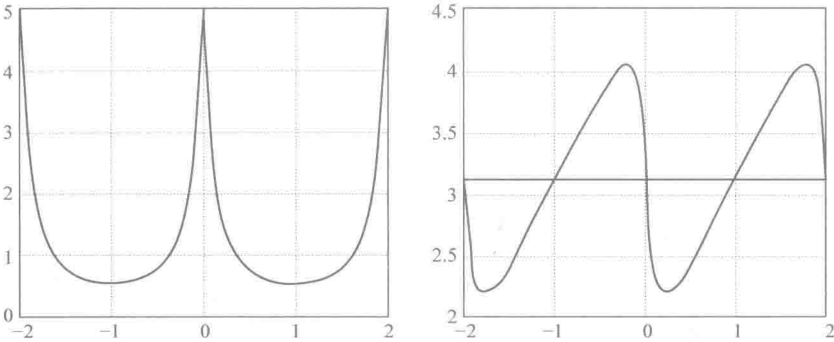


图 3.17　$x_1(n)$的幅度和相位响应

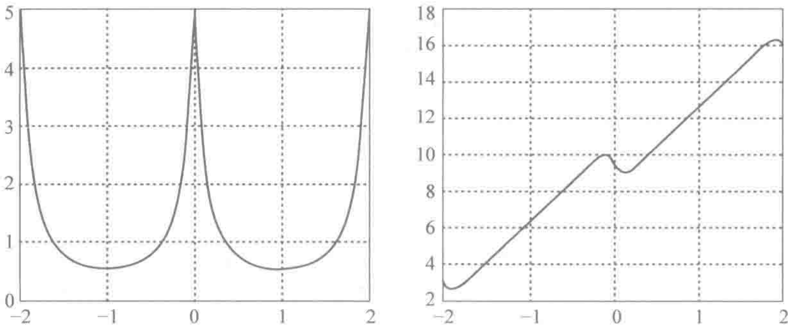


图 3.18　$x_3(n)$的幅度和相位响应

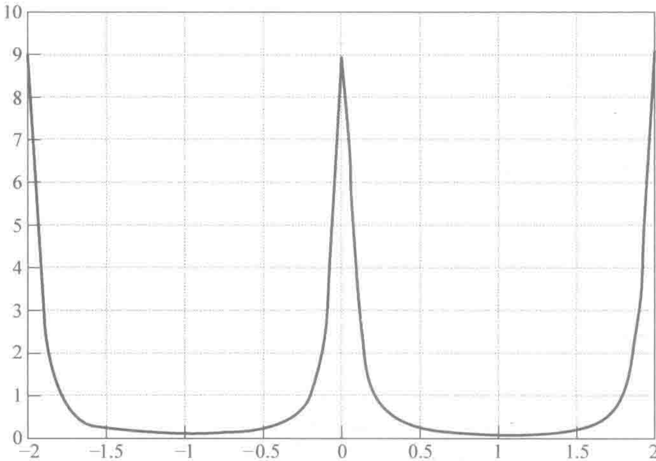


图 3.19　$x_{13}(n)$的幅度响应

得到

$$|X_1(e^{j\omega})| = \frac{1.0}{\sqrt{(1-0.8\cos\omega)^2+(0.8\sin\omega)^2}} \tag{3.39}$$

$$= \frac{1.0}{\sqrt{1+0.64-1.6\cos\omega}} \tag{3.40}$$

$$\text{Ang}[X_1(e^{j\omega})] = \text{Ang}[X_3(e^{j\omega})] = -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right) \tag{3.41}$$

$$|X_3(e^{j\omega})| = \frac{0.8}{\sqrt{(1-0.8\cos\omega)^2+(0.8\sin\omega)^2}} \tag{3.42}$$

$$= \frac{0.8}{\sqrt{1+0.64-1.6\cos\omega}} \tag{3.43}$$

$$X_{13}(e^{j\omega}) = \frac{0.36}{1-1.6\cos\omega+0.64} \tag{3.44}$$

3.4 单位阶跃序列的 DTFT

注意，$a^n(n) \Leftrightarrow 1/(1-ae^{-j\omega}) = e^{j\omega}/(e^{j\omega}-a)$ 仅当 $|a|<1$ 时是有效的。当 $a=1$ 时，得到单位阶跃序列 $u(n)$，但 DTFT $1/(1-e^{-j\omega})$ 在 $\omega=0$，$\pm k2\pi$ 处具有无穷个极点，其中 k 为一整数。为了避免 $1/(1-e^{-j\omega}) = e^{j\omega}/(e^{j\omega}-1)$ 中的这些奇异性，以不同的方法推导单位阶跃序列 $u(n)$ 的 DTFT，如下所述。

将单位阶跃函数表示为两个函数的和

$$u(n) = u_1(n) + u_2(n)$$

其中

$$u_1(n) = \frac{1}{2} \quad -\infty < n < \infty$$

和

$$u_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & n < 0 \end{cases}$$

因此，可表达为 $\delta(n) = u_2(n) - u_2(n-1)$。使用 $\delta(n) \Leftrightarrow 1$ 和 $u_2(n) - u_2(n-1) \Leftrightarrow U_2(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}U_2(e^{j\omega}) = U_2(e^{j\omega})(1-e^{-j\omega})$，将这两个结果等同起来，得到

$$1 = U_2(e^{j\omega})(1-e^{-j\omega})$$

因此

$$U_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

我们知道 $u_1(n)=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)=U_1(e^{j\omega})$ 的 DTFT。添加这两个结果，有最终结果

$$u(n)\Leftrightarrow\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{-j\omega}} \tag{3.45}$$

这一结论给了单位阶跃函数 $u(n)$ 的 DTFT，它是唯一的。

应用 $u(n)$ 的时移特性、频移特性和时域反转特性，可以推导几个更多的离散函数的 DTFT。例如

$$u(n-k)\Leftrightarrow e^{-j\omega k}\left[\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\right] \tag{3.46}$$

$$e^{j\omega_0 n}u(n)\Leftrightarrow\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{-j(\omega-\omega_0)}} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 n)u(n)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\Bigg[&\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{-j(\omega-\omega_0)}}\\&+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)+\frac{1}{1-e^{j(\omega+\omega_0)}}\Bigg]\end{aligned} \tag{3.48}$$

值得将上述给出的 $e^{j\omega_0 n}u(n)$ 的 DTFT 和 $e^{-an}u(n)$ 的 DTFT 进行比较，其中 $|a|<1$：

$$e^{-an}u(n)\Leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-a}e^{-j\omega}} \tag{3.49}$$

3.4.1　微分特性

为了证明 $nu(n)\Leftrightarrow j[dX(e^{j\omega})]/d\omega$，我们从 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 开始，两边进行求导得到 $[dX(e^{j\omega})]/d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-jn)e^{-j\omega n}$，两边都乘以 j，得到 $j[dX(e^{j\omega})]/d\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)e^{-j\omega n}$。这个证明与第 2 章中证明 $nx(n)u(n)$ 的 z 变换为 $-z[dX(z)]/dz$ 是类似的。

给定 $x(n)=a^n u(n)\Leftrightarrow 1/(1-ae^{-j\omega})=X(e^{j\omega})$，可以使用微分特性推导如下公式：

$$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}=j\left[\frac{-jae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}\right]=\frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$na^n u(n)\Leftrightarrow\frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2} \tag{3.50}$$

因为 $a^n u(n)$ 的 DTFT 为 $1/(1-ae^{-j\omega})$，将这个 DTFT 添加到 $na^n u(n)$ 的 DTFT 上，得到

$$(n+1)a^n u(n)\Leftrightarrow\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2} \tag{3.51}$$

例 3.10

考虑矩形脉冲

$$x_{\mathrm{r}}(n)=\begin{cases}1 & |n|\leqslant N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$$

它绘制在图 3.20 中。也就是熟知的矩形窗（长度为 $2N+1$），将在第 5 章当我们讨论 FIR 滤波器设计时使用。其 DTFT 推导如下：

$$X_{\mathrm{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

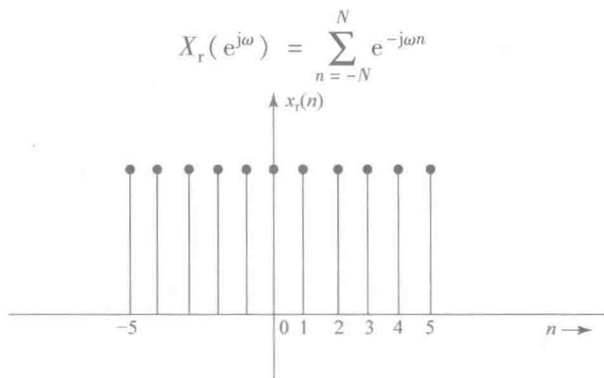


图 3.20　矩形脉冲函数

为了简化这一求和，使用恒等式[⊖]

$$\sum_{n=-N}^{N} r^{n}=\begin{cases}\dfrac{r^{N+1}-r^{-N}}{r-1} & r\neq 1 \quad (3.52)\\ 2N+1 & r=1 \quad (3.53)\end{cases}$$

并得到

$$\begin{aligned}X_{\mathrm{r}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N+1)\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\omega}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-1}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N+0.5)\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N+0.5)\omega}\right]}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.5\omega})}\\&=\begin{cases}\dfrac{\sin[(N+0.5)\omega]}{\sin(0.5\omega)} & \omega\neq 0\\ 2N+1 & \omega=0\end{cases}\end{aligned}$$

如图 3.21 所示。

⊖ $\sum_{n-N}^{N}(r^{n+1}-r^{n})=(r^{-N+1}+r^{-N+2}+\cdots+r^{-1}+1+r+r^{2}+\cdots+r^{N}+r^{N+1})-(r^{-N}+r^{-N+1}+r^{-N+2}+\cdots+1+r+r^{2}+\cdots+r^{N})=r^{N+1}-r^{-N}$. 因此 $\sum_{n=-N}^{N}(r^{n+1}-r^{n})=(r-1)\sum_{n=-N}^{N}r^{n}$ 和 $\sum_{n=-N}^{N}r^{n}=(r^{N+1}-r^{-N})/r-1$; $r\neq 1=2N+1$; $r=1$.

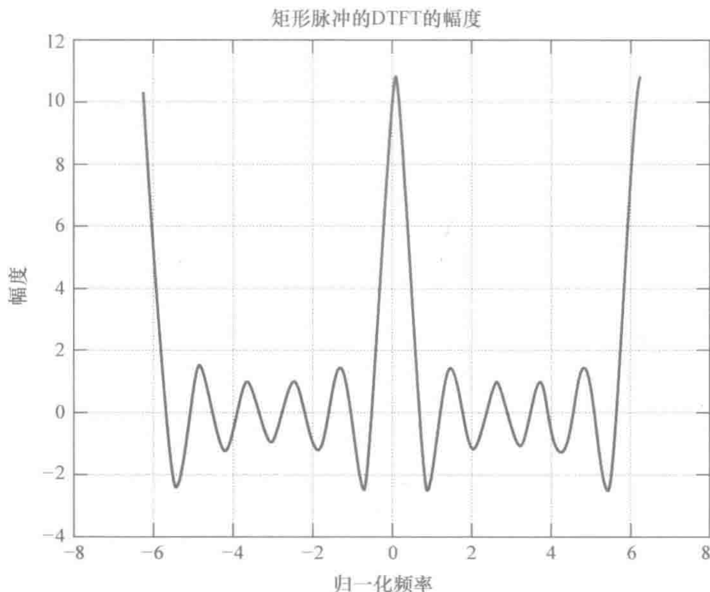


图 3.21 矩形脉冲函数的 DTFT

使用时移特性，可以找到序列 $x_{r2}(n)=x_1(n-N)$ 的 DTFT 为

$$X_{r2}(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega}\frac{\sin[(N+0.5)\omega]}{\sin 0.5\omega} \tag{3.54}$$

其中，
$$x_{r2}(n) = \begin{cases}1 & 0 \leqslant n \leqslant 2N \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

例 3.11

让我们寻找矩形谱 $H(e^{j\omega})$ 的 IDTFT，在图 3.7a 中显示为一理想低通滤波器的幅度，截止频率为 ω_c。

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right)\Bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n) = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c n) \end{aligned} \tag{3.55}$$

这是一个线性频谱，如图 3.22 所示。将矩形脉冲函数 $x_r(n)$ 及其频率响应 $X_r(e^{j\omega})$ 的常见形状与低通滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 及其上述推导的逆 DTFT $h(n)$ 进行比较会发现是比较有趣的。然而，应该指出的是，它们不是彼此对偶

的，因为 $X_r(e^{j\omega})$ 实际上不是 ω 的正弦函数。

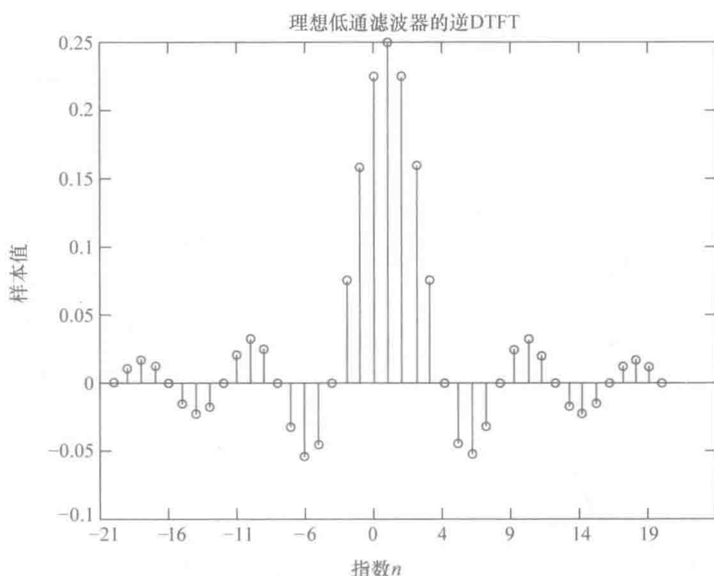


图 3.22　理想低通滤波器的逆 DTFT

3.4.2　乘法特性

当两个离散时间序列相乘时，例如，$x(n)h(n)=y(n)$，$y(n)$ 的 DTFT 是 $X(e^{j\omega})$ 和 $H(e^{j\omega})$ 的卷积，它可以在频域上通过一个完整周期的积分实现。在卷积积分中选择 $[-\pi, \pi]$ 的周期，定义 $X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega})=Y(e^{j\omega})$，得到特性：

$$x(n)h(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\zeta})H[e^{j(\omega-\zeta)}]d\zeta \tag{3.56}$$

记住，我们在第 5 章讨论 FIR 滤波器设计时将使用式（3.55）和式（3.56）。

例 3.12

这里讨论的特性和 DTFT - IDTFT 对经常用于离散时间系统的频域分析，包括滤波器的设计。然而，正如前面所提到的，它们也可以用于时域分析中，特别是当不能使用 z 变换技术时。为了说明这一点，我们提供下面的实例。

给定离散时间系统的单位冲激响应为 $h(n)=(0.2)^n u(n)$，输入序列给定为 $x(n)=(0.5)^{-n}u(-n)$。则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0.2e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.2}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0.5e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-0.5}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left(\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.2}\right)\left(\frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-0.5}\right)$$

现在令：

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{k_1 e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.2} + \frac{k_2 e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-0.5}$$

这样，可以很容易地得到每一项的逆 DTFT。注意这两项的差别。

然后，我们从下述方法中计算 k_1，它与先前使用的部分分式方法略有不同：

$$Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}(e^{j\omega}-0.2) = \frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-0.5} = k_1 + \frac{k_2(e^{j\omega}-0.2)}{(e^{-j\omega}-0.5)}e^{-j2\omega}$$

在 $e^{j\omega}=0.2$ 处对这两项进行求值，得到

$$k_1 = \left(\frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-0.5}\right)\Bigg|_{e^{j\omega}=0.2} = \frac{5}{4.5} = 1.111$$

类似的，常数 k_2 也如下计算（它与先前使用的部分分式扩展方法略有不同）：

$$Y(e^{j\omega})e^{j\omega}(e^{-j\omega}-0.5) = \frac{k_1 e^{j2\omega}(e^{-j\omega}-0.5)}{e^{j\omega}-0.2} + k_2 = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.2}$$

在 $e^{j\omega}=2.0$ 处计算这两项，得到 $k_2 = 2/1.8 = 1.111$。因此，有 $Y(e^{j\omega}) = 1.111e^{j\omega}/(e^{j\omega}-0.2) + 1.111e^{-j\omega}/(e^{-j\omega}-0.5)$，输出 $y(n) = 1.111(0.2)^n u(n) + 1.111(0.5)^{-n}u(-n)$。

现在，阐述一种寻找

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left(\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.2}\right)\left(\frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-0.5}\right)$$

逆 DTFT 的更好的方法。

将其表示为如下形式：

$$\frac{1}{(1-0.2e^{-j\omega})(1-0.5e^{j\omega})}$$

其中，分母的每一项是通用形式（$1-ae^{-j\omega}$）或（$1-ae^{j\omega}$）。现在，选择部分分式扩展变为如下形式

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{K_1}{1-0.2e^{-j\omega}} + \frac{K_2}{1-0.5e^{j\omega}}$$

通过计算

$$Y(e^{j\omega})(1-0.2e^{-j\omega})\big|_{e^{j\omega}=0.2}=\frac{1}{1-0.5e^{j\omega}}\bigg|_{e^{j\omega}=0.2}=1.1111$$

$$K_2=Y(e^{j\omega})(1-0.5e^{j\omega})\big|_{e^{j\omega}=2}=\frac{1}{1-0.2e^{-j\omega}}\bigg|_{e^{j\omega}=2}=1.111$$

例 3.13

令 $x(n)=e^{j(0.3\pi n)}$ 和 $h(n)=(0.2)^n u(n)$。如实例 3.12 所示，我们可以找到 $x(n)=e^{j(0.3\pi n)}$ 的 DTFT 为 $X(e^{j\omega})=2\pi\sum\delta(\omega-0.3\pi-2\pi k)$，$h(n)$ 的DTFT为

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-0.2e^{-j\omega}}=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.2}$$

因此
$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=2\pi\sum\delta(\omega-0.3\pi-2\pi k)H(e^{j\omega})$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-0.3\pi-2\pi k)H(e^{j0.3\pi})$$

$$=\left(\frac{e^{j0.3\pi}}{e^{j0.3\pi}-0.2}\right)2\pi\sum\delta(\omega-0.3\pi-2\pi k)$$

$$=[1.1146e^{-j(0.1813)}]2\pi\sum\delta(\omega-0.3\pi-2\pi k)$$

因此
$$y(n)=[1.1146e^{-j(0.1813)}]e^{j(0.3\pi n)}=1.1146e^{j(0.3\pi n-0.1813)}。$$

作为替换方法，我们从 $e^{j\omega n}$ 与 $h(n)$ 卷积重新选择，得到 $y(n)=e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$。在这个实例中，$H(e^{j\omega})=[e^{j\omega}/(e^{j\omega}-0.2)]$ 及 $\omega=0.3\pi$。因此，$y(n)=e^{j0.3\pi n}H(e^{j0.3\pi})$：

$$y(n)=e^{j0.3\pi n}\left[\frac{e^{j0.3\pi}}{(e^{j0.3\pi}-0.2)}\right]=1.1146e^{j(0.3\pi n-0.1813)}$$

通过这个方法，我们还可以发现，当输入是 $\mathrm{Re}\{x(n)\}=\cos(0.3\pi n)$ 时，输出由 $y(n)=\mathrm{Re}\{1.1146e^{j(0.3\pi n-0.1813)}\}=1.1146\cos(0.3\pi n-0.1813)$ 给出。

3.4.3　共轭特性

这里，假定样本 $x(n)$ 是复数，其一般形式为 $x(n)=(ae^{j\theta})^n$，复共轭为 $x^*(n)=(ae^{-j\theta})^n$。

其 DTFT 为

$$x(n)\Leftrightarrow X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ae^{j\theta})^n e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a)^n e^{j\theta n}e^{-j\omega n}$$

$$x^*(n)\Leftrightarrow X_2(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(ae^{-j\theta})^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a)^n e^{-j\theta n} e^{-j\omega n}$$

现在在 $X_2(e^{j\omega})$ 中将 ω 替换为 $-\omega$，得到 $X_2(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a)^n e^{-j\theta n} e^{j\omega n} = X_1(e^{j\omega})$，得到其共轭为 $X_2^*(e^{-j\omega})$：

$$X_2^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a)^n e^{j\theta n} e^{-j\omega n} = X_1(e^{j\omega})$$

换句话说，这一结论 $X_2^*(e^{-j\omega}) = X_1(e^{j\omega})$ 意味着，我们发现复共轭序列 $(ae^{-j\theta})^n$ 的 DTFT，用 $-\omega$ 替换 ω，然后得到结果的复共轭，它与序列 $(ae^{j\theta})^n$ 的 DTFT 是相同的。

然而，当 $x(n)$ 是实数时，$x(n) = x^*(n)$，在这种情况下，$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega})$。因此，有如下结论：

$$X_1(e^{j\omega}) = X_1^*(e^{-j\omega}) \quad 当 \quad x(n) \quad 是实函数时 \tag{3.57}$$

3.4.4 对称特性

从式（3.57）的结论中，可以推导出当序列 $x(n)$ 是实数时有下列对称特性：

$$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \tag{3.58}$$

$$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \tag{3.59}$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \tag{3.60}$$

$$\mathrm{Ang}\, X(e^{j\omega}) = -\mathrm{Ang}\, X(e^{-j\omega}) \tag{3.61}$$

序列 $x(n)$ 的偶数和奇数部分分别定义为 $x_e(n) = [x(n) + x(-n)]/2$ 和 $x_o(n) = [x(n) - x(-n)]/2$。当 $x(n)$ 是实数时，使用时域反转特性得到 $x_e(n) \Leftrightarrow [\{X(e^{j\omega})\} + \{X(e^{-j\omega})\}/2] = \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$：

$$x_e(n) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} \tag{3.62}$$

类似地，$x_o(n) \Leftrightarrow [\{X(e^{j\omega})\} - \{X(e^{-j\omega})\}]/2 = j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$：

$$x_o(n) \Leftrightarrow j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} \tag{3.63}$$

从式（3.60）和式（3.61）我们看到，幅度响应 $|X(e^{j\omega})|$ 是 ω 的偶函数，相位响应是 ω 的奇函数。

离散时间傅里叶变换的基本性质和一些常见 DTFT－IDTFT 对的实例如下表 3.1 和表 3.2 所示。

表 3.1　离散时间傅里叶变换的性质

性质	时域 $x(n),x_1(n),x_2(n)$	频域 $X(e^{j\omega}),X_1(e^{j\omega}),X_2(e^{j\omega})$
线性	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$
卷积	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$
时移	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$
频移	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
时域反转	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
相乘	$x_1(n)x_2(n)$	$(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j\zeta})X_2[e^{j(\omega-\zeta)}]d\zeta$
倍乘	$nx(n)$	$j[dX(e^{j\omega})]/d\omega$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(n)$ 的偶部	$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$	$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
$x(n)$ 的奇部	$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$	$j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
对称		$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=\mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\}$
		$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=-\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\}$
		$\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$
		$\mathrm{Ang}\,X(e^{j\omega})=-\mathrm{Ang}X(e^{-j\omega})$

表 3.2　常见 IDTFT－DTFT 对

信号(IDTFT):$x(n)$	离散时间傅里叶变换(DTFT):$X(e^{j\omega})$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-k)$	$e^{-j\omega k}$
1(对所有 n)	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)-\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)$
$e^{-an}u(n)$; $\lvert a\rvert<1$	$1/(1-e^{-a}e^{-j\omega})$

（续）

信号（IDTFT）：$x(n)$	离散时间傅里叶变换（DTFT）：$X(e^{j\omega})$
$a^n u(n)$；$\|a\|<1$	$1/(1-ae^{-j\omega})$
$na^n u(n)$；$\|a\|<1$	$ae^{-j\omega}/(1-ae^{-j\omega})^2$
$(n+1)a^n u(n)$；$\|a\|<1$	$1/(1-ae^{-j\omega})^2$
$x(n)=\begin{cases}1 & \|n\|\leq N\\ 0 & \|a\|>N\end{cases}$	$\sin(N+0.5)\omega/\sin(0.5\omega)$
$(1/\pi n)\sin(\omega_c n)$	$\begin{cases}1 & \|\omega\|\leq\omega_c\\ 0 & \|\omega\|>\omega_c\end{cases}$
$u(n)$	$1/(1-e^{-j\omega})+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

3.5 使用 MATLAB 计算 DTFT

如果函数是有限序列，比如 FIR 滤波器的单位冲激响应 $H(z^{-1})=\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}$，然后通过下式给出了该滤波器的差分方程

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k) \tag{3.64}$$

发现其频率响应或傅里叶变换（DTFT）为

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{M}b_k X(e^{j\omega})e^{-j\omega k}$$

其中，这个 FIR 滤波器的频率响应通过下式给出：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N}b_k e^{-j\omega k} \tag{3.65}$$

它也是信号 $h(k)=[b_0,b_1,b_2,\cdots,b_N]$的 DTFT。

假设给出 IIR 滤波器的传递函数：

$$H(z^{-1})=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

有两种等效的方法用于寻找这个滤波器的频率响应，如下所述。

我们发现 $H(z^{-1})$的逆 z 变换 $h(n)$给出了其单位冲激响应的无限长采样数，现在可以计算其频率响应或其 DTFT 如 $H(e^{-j\omega})=\sum_{r=0}^{\infty}h(n)e^{-j\omega r}$。另一种方法使用了差分方程

$y(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$，求双边 DTFT，通过下式给出

$$Y(e^{j\omega})\left[1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}\right]=X(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}$$

因此

$$H(e^{-j\omega})=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}} \tag{3.66}$$

简而言之，我们能说，$H(e^{j\omega})=H(z^{-1})|_{z}=e^{j\omega}$提供了双边的存在。

为了计算并绘制 FIR 或 IIR 滤波器传递函数 $H(z^{-1})$的幅度、相位和/或群延迟，我们使用在信号处理和滤波器设计中广泛使用的 MATLAB 函数如 freqz、abs、angle、unwrap、grpdelay。这些函数可以在 MATLAB 信号处理工具箱中找到。

当已知系数为 b_k 和 a_k 的序列时，它们作为分子和分母的向量值输入。函数 freqz 与几个不同的输入变量一起使用，如下所述：

```
[h,w] = freqz(num,den,w)
[h,w] = freqz(num, den, f, Fs)
[h,w] = freqz(num,den,K,Fs)
[h,w] = freqz(num,den,K,'whole')
[h,f] = freqz(num,den,K,'whole',Fs)}
```

行向量 num 和 den 分别是分子和分母系数 a_k 和 b_k 的行向量。函数 freqz 计算频率响应值作为频率 w 离散值上的列向量 h。默认频率 w 的集合介于 0 到 π 之间，f 的集合是我们可以任意在 0 和 Fs/2 之间进行区分的频率值的向量，其中 Fs 是以赫兹为单位的采样频率。我们可以选择 K 的值作为默认区间内的频率点数；最好将 K 的值选为 2 的整数次幂，比如 256、512 或 1024，以便得到更快速的计算。如果不指定 K 的值，程序选定的默认值为 512。当在函数 freqz 中包含参数 'whole'时，w 和 f 的频率区间分别在［0 2π］和［0 Fs］内变化。

在离散频率上计算出频率响应的值后，我们就可以使用 H = abs(h)计算其幅度或使用 HdB = 20 * log10(H)计算其分贝幅度。由函数 ph = angle(h)得到滤波器的相位响应（以弧度为单位），随后可以使用 ph = unwrap(ph)展开相位响应以便使相位角落在 0 和 2π 之间。滤波器的群延迟通过 MATLAB 函数 grpdelay 计算（而不是由函数 freqz）如下：

```
[gd,w]=grpdelay(num,den,K,)
[gd,w]=grpdelay(num,den,K,'whole')
```

注意，在上面的语句中，我们可以改变 num，den，h，H，HdB，f，FT，K，ph，Ph，gd 的名称作为我们喜欢变量的名称。计算 H，HdB，ph、Ph、gd 值后，我们使用不同的变量选择绘图。当我们绘制 H，HdB，ph，Ph，或 grpdelay 时，我们在 0 到 π 之间线性归一化频率后进行绘图。但函数 semilog（……）是作为 lg(w)的函数，因此 semilog（HdB）变成数字滤波器的 Bode 图；或者，我们定义 ww = lg(w)作为新频率变量，使用函数 plot（ww，H）或 plot（ww，HdB）绘幅度图。

例 3.14

```
%Program to compute and plot the magnitude and phase responses
%  of a filter
b=[0.0532 0.3725 1.1176 1.8626 1.8626 1.1176 0.3725 0.0532];
a=[1.0000 1.5473 2.1992 1.2240 0.8269 0.0347 0.0587 -0.0790];
[h,w]=freqz(b,a,256);
H=abs(h);
HdB=20*log10(H);
ph=angle(h);
Ph=unwrap(ph);
[gd,w]=grpdelay(b,a,256);
subplot(1,2,1)
plot(w,H);grid
title('Magnitude of the frequency response')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
subplot(1,2,2)
plot(w,HdB);grid
title('Magnitude in dB of the frequency response')
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Normalized frequency')
figure(2)
subplot(1,2,1)
plot(w,ph);grid
title('Phase response of the filter')
ylabel('Phase angle in radians')
xlabel('Normalized frequency')
subplot(1,2,2)
plot(w,Ph);grid
title('Unwrapped phase response filter')
ylabel('Phase angle in radians')
xlabel('Normalized frequency')
%end
```

这个 IIR 滤波器的幅度响应和相位响应绘制在图 3.23 和图 3.24 中。

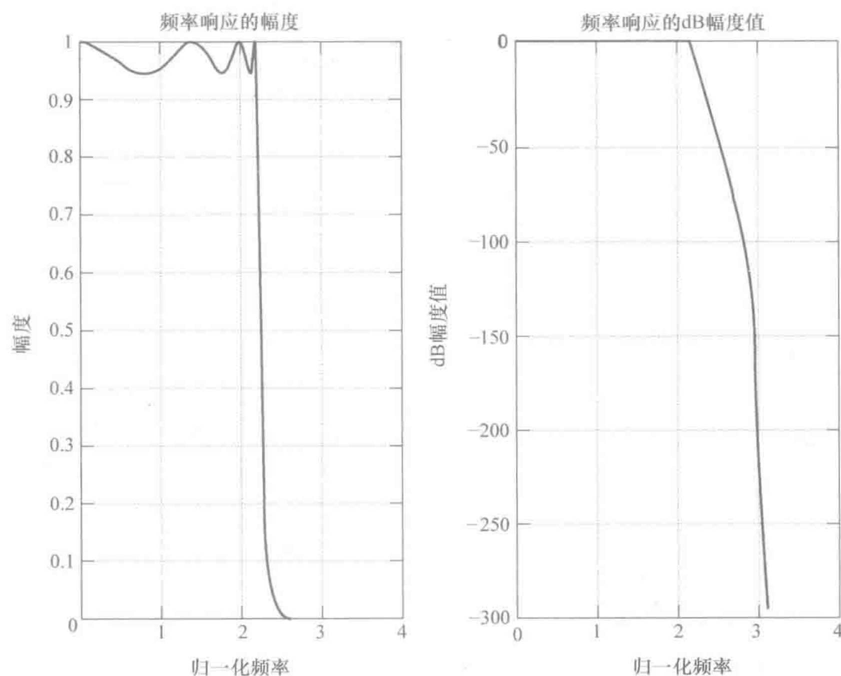


图 3.23 IIR 滤波器的幅度响应

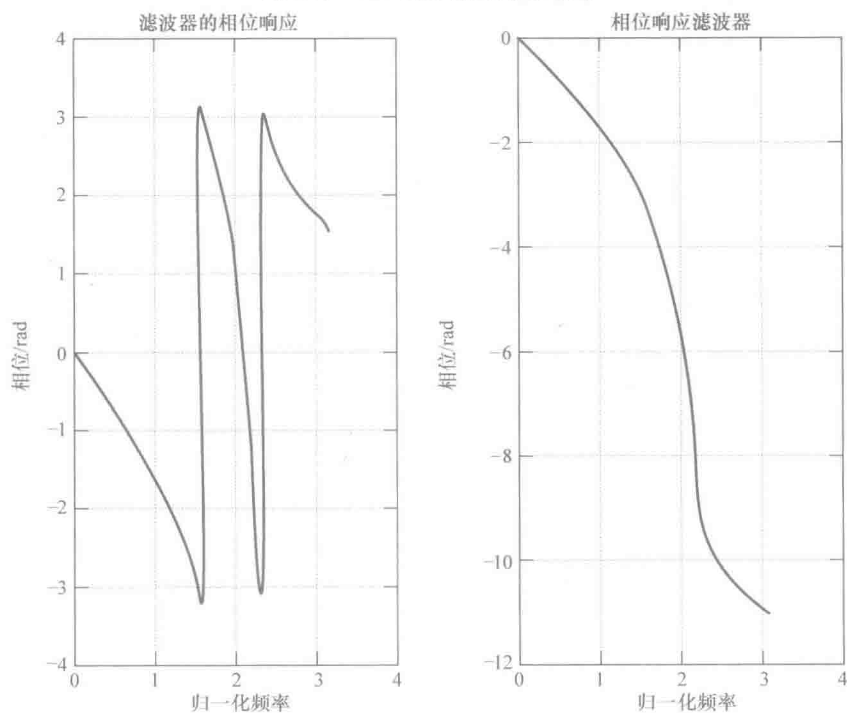


图 3.24 IIR 滤波器的相位响应

例 3.15

现在考虑一个 FIR 滤波器，有限数量的系数为［1.0 0.8 0.6 0.4 0.6 0.8 1.0］。用于计算其频率响应并在 0 ~ 2π 范围内显示的 MATLAB 脚本如下所示：

```
%Program to compute and plot the frequency response or DTFT
%  of an FIR filter
b=[1.0 0.8 0.6 0.4 0.6 0.8 1.0];
[h,w]=freqz(b,1,256,'whole');
H=abs(h);
ph=angle(h);
plot(w,H);grid
title('Magnitude of the FIR filter')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency from 0 to 2*pi')
figure
plot(w,ph);grid
title('Phase response of the FIR filter')
ylabel('Phase angle in radians')
xlabel('Normalized frequency')
%end
```

归一化频率范围在 0 ~ 2π，如图 3.25 和图 3.26 所示。在本例中发现相位响应是频率的线性函数。在第 4 章，我们将使用上述 MATLAB 函数做更多的例子，计算和绘制数字滤波器的 DTFT。

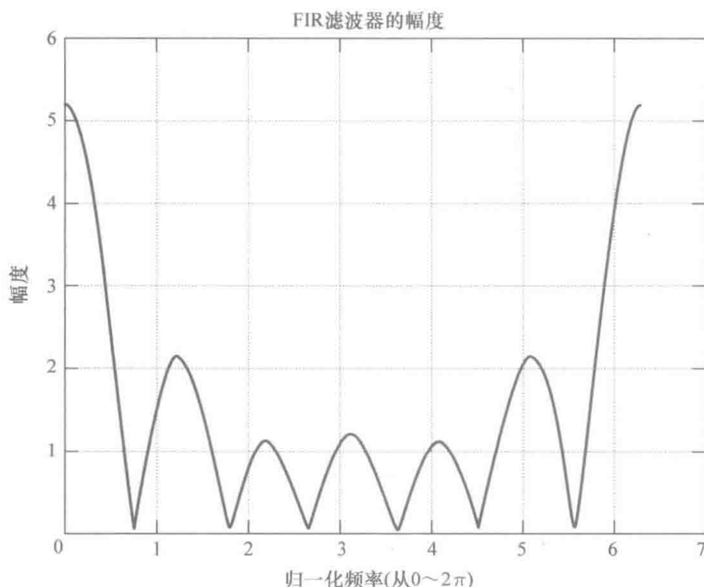


图 3.25 FIR 滤波器的幅度响应

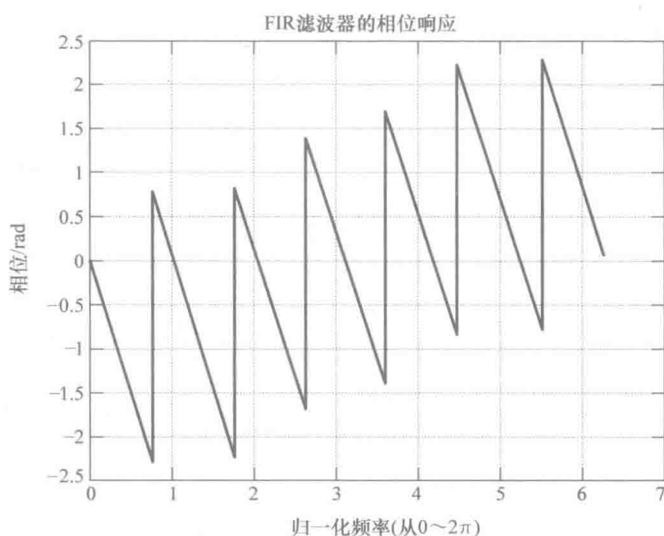


图 3.26 FIR 滤波器的相位响应

例 3.16

在这个例子中，选择采样频率 $F_s = 200$Hz，奈奎斯特间隔分为 100 等量，如下面 MATLAB 程序中所示 f = [0:99]。当程序提示时，我们输入信号的样本值。在此例子中，输入 [0.4 0.6 0.8] 作为输入信号。幅度和相位都绘制在图 3.27 中，为频率从 0 ~ 100Hz 的变化函数。但群延迟是归一化频率，为从 0 ~ π 弧度的频率函数。

```
% Program to compute and plot the magnitude and phase and
%   group delay of an FIR filter
b=input('Type the values of the signal');
a=1;
f=0:99;
Fs=200;
[H,w]=freqz(b,a,f,Fs);
mag=abs(H);
DB=20*log10(mag);
phase=angle(H);
[grp,w]=grpdelay(b,a,256);
subplot(2,2,1)
plot(f,mag);grid
title('Magnitude response of the filter')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Frequency in Hz')
subplot(2,2,2)
```

```
plot(f,DB);grid
title('Magnitude response in dB')
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Frequency in Hz')
subplot(2,2,3)
plot(f,phase);grid
title('Phase response')
ylabel('Phase angle in radians')
xlabel('Frequency in Hz')
subplot(2,2,4)
plot(w,grp);grid
title('Group Delay response'))
ylabel('Group Delay in samples'))
xlabel('Normalized frequency')
%end
```

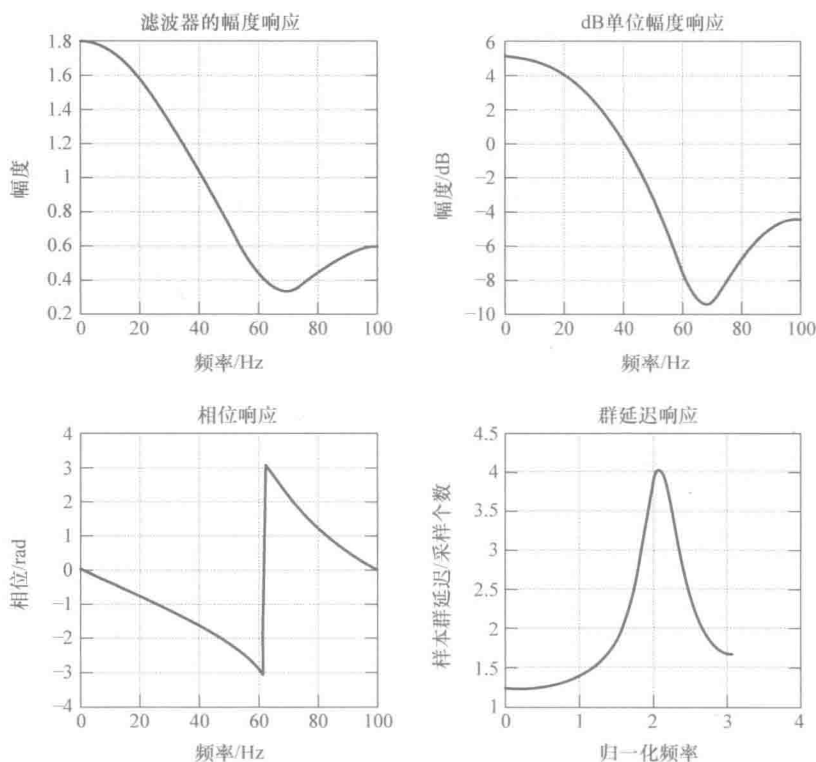


图 3.27 FIR 滤波器的幅度、相位和群延迟响应

3.6 DTFS和DFT

3.6.1 简介

我们讨论了离散时间函数DTFT-IDTFT对如下：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{3.67}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{3.68}$$

推导变换对理论和它们性质及应用非常简练，但是从实际的角度看，在计算DTFT和IDTFT有一些限制。例如，输入信号通常为非周期的，长度可能有限，但IIR滤波器的单位冲激响应也非周期，但无限长度；然而，在许多实际应用中，当n变得很大时，其样本值几乎可以忽略。所以在式（3.67）中，假定样本数量有限是合理的。但$X(e^{j\omega})$是ω的连续变量函数。我们已给出分析性推导闭环函数式的例子，并绘制了以ω为变量的函数图。我们将展示如何通过使用MATLAB函数来实现它。

考虑离散时间函数$x(n)$及其DTFT $X(e^{j\omega})$的多个例子。图3.28a显示了一个非周期的离散函数$x(n)$，其长度有限。图3.28b，c显示了DTFT $X(e^{j\omega})$的幅度响应和相位响应。

式（3.68）中函数$X(e^{j\omega})$是连续变量ω的函数，积分表达式不是很适合由数字计算机计算。当然，我们可以使频率变量离散化为离散值，求离散值$X(e^{j\omega_k})$其中，ω_k为离散值的频率。与连续时间信号频率响应$X(j\omega)$对比，我们注意到，由于$X(e^{j\omega})$的周期性，只需要计算DTFT的有限数量的值，而且仅一个周期即可。在式（3.68）中，如果积分可由求和替代，而且因为$X(e^{j\omega_k})$值被选择在$(-\pi, \pi)$区间，求和为有限值，$x(n)$就可以近似计算。[我们也注意到，从$x(n)$得到重构信号$x(t)$的公式也不适合数字计算机。]这些限制由于基于离散时间信号周期性模型的理论而缓解，在下一节，将叙述离散时间信号的离散傅里叶级数（DTFS）。这一理论，开拓了周期性DTFT的性质，因此我们只需要使用一个周期的有限频率范围就足以找到它的逆。

3.6.2 离散时间傅里叶级数

考虑一个离散非周期信号$x(n)$，有N个样本，而且生成一个周期为N的序列以满足条件$x_p(n+KN)=x_p(n)$，K是任意整数。这个周期信号的复傅里叶级数表达包含着复指数$e^{j\omega_0 kn}$的求和，$\omega_0=2\pi/N$是它的基本频率，而$\omega_0 k$是k

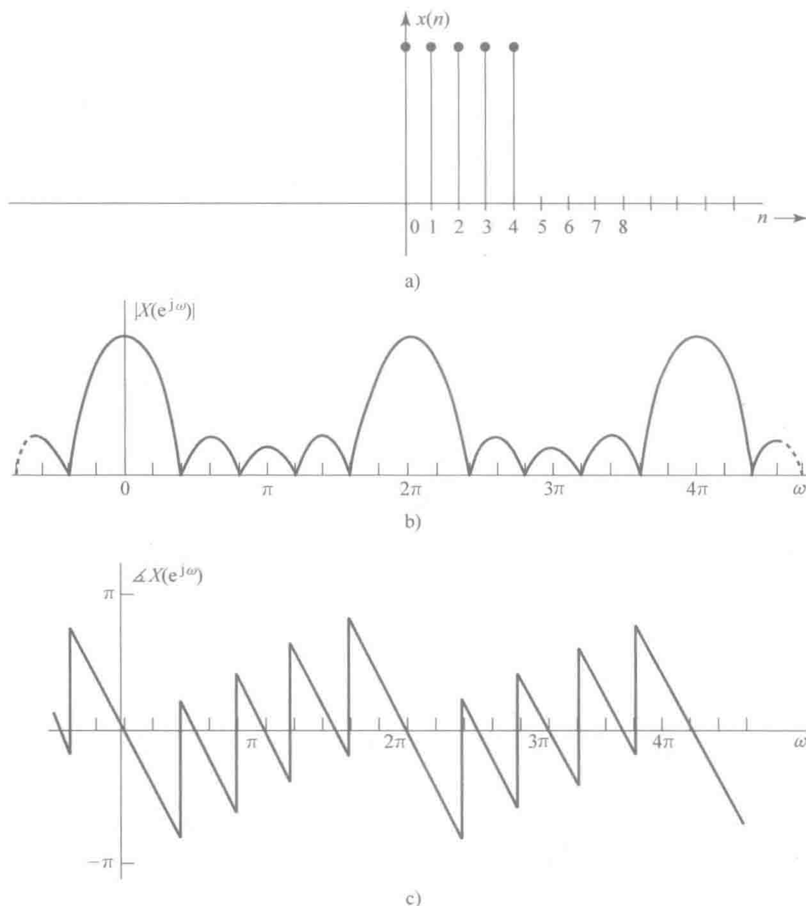


图 3.28

a）非周期信号 b）幅度响应 c）相位响应

次谐波频率。傅里叶级数是基波及高次谐波的加权和，形如 $x_p(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X_p(k)e^{j\omega_0 kn}$ 其中，$X_p(k)$是第 k 次谐波的傅里叶级数系数。这些系数一般为复值，因此有一个幅度和一个相位构成：$|X_p(k)=|X_p(k)\measuredangle X_p(k)$。

在第 1 章中，我们指出离散时间指数的一个重要性质（与连续时间指数 $e^{j\omega_0 kt}$相比）为频率间隔 2π 整数倍相同，

$$e^{j(\omega_0\pm2\pi)k}=e^{j\omega_0 k}e^{j\pm2\pi k}=e^{j\omega_0 k} \tag{3.69}$$

因此复傅里叶级数系数 $X_p(k)=X_p(k\pm N)$。因此只有 N 个独立谐波（与连续周期函数有无限数量的谐波相比），从而我们使用下标表示这些系数 $X_p(k)$ 是周期的。

因此，在其复傅里叶级数的形式中，得到

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn} \tag{3.70}$$

为了求这些系数，方程两边都乘以 $e^{-jm\omega_0 k}$ 并从 $n=0$ 到 $(N-1)$ 求和：

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jm\omega_0 k} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j(2\pi/N)kn} e^{-jm\omega_0 k} \tag{3.71}$$

通过在右边交换求和的顺序，得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)} \right] \tag{3.72}$$

下面将表明，当 $n=m$ 时 $[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)}]$ 等于 N，而对于所有 $n \neq m$ 时值为零。

当 $n=m$ 时，求和简化为 [$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j0} = N$，

当 $n \neq m$ 时，应用式（3.52），得到总和为零。因此在式（3.72）中只有一个非零项 $X_p(k)N$。最后的结果是

$$X_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\omega_0 kn} \tag{3.73}$$

现在，注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\omega_0 kn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \\ &= \left(\frac{1}{N}\right) X_p(e^{j\omega}) \Big|_{\omega_k=(2\pi/N)k} = X_p(k) \end{aligned} \tag{3.74}$$

换句话说，当有限长序列 $x(n)$ 的 DTFT 在离散频率 $\omega_k = (2\pi/N)k$ 处被估值，（当频率范围［0，2π］分为 N 个等距的点时，这是第 k 个样本），除以 N 后，我们得到傅里叶级数系数的值 $X_p(k)$。

式（3.70）称为离散时间，周期性函数 $x_p(n)$ 的离散时间傅里叶级数（DTFS），式（3.73）给出 DTFS 的复值系数，是逆 DTFS（IDTFS）。因为 $x_p(n)$ 和 $X_p(k)$ 具有周期性，周期为 N，因此，对于 $-\infty < n < \infty$ 和 $-\infty < k < \infty$，上述两个表达式是有效的。请注意，一些作者缩写 DTFS 为 DFS。

为简化符号，用 W_N 表示 $e^{-j(2\pi/N)n}$，使式（3.70）和式（3.73）重新写成紧凑的 DTFS－IDTFS 对形式

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) W^{-kn}, \quad -\infty < n < \infty \tag{3.75}$$

$$x_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_p(n) W^{kn}, \quad -\infty < k < \infty \tag{3.76}$$

图3.29a 显示了一个由图 3.28a 构建而来的周期性离散函数 $x_p(n)$，而图

3.29b、c 显示了在离散频率 $\omega_k = k\ (2\pi/N)$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ (N-1)$ 处 DTFT 的幅度 $N|X_p(k)|$ 和相位 $\measuredangle X_p(k)$。

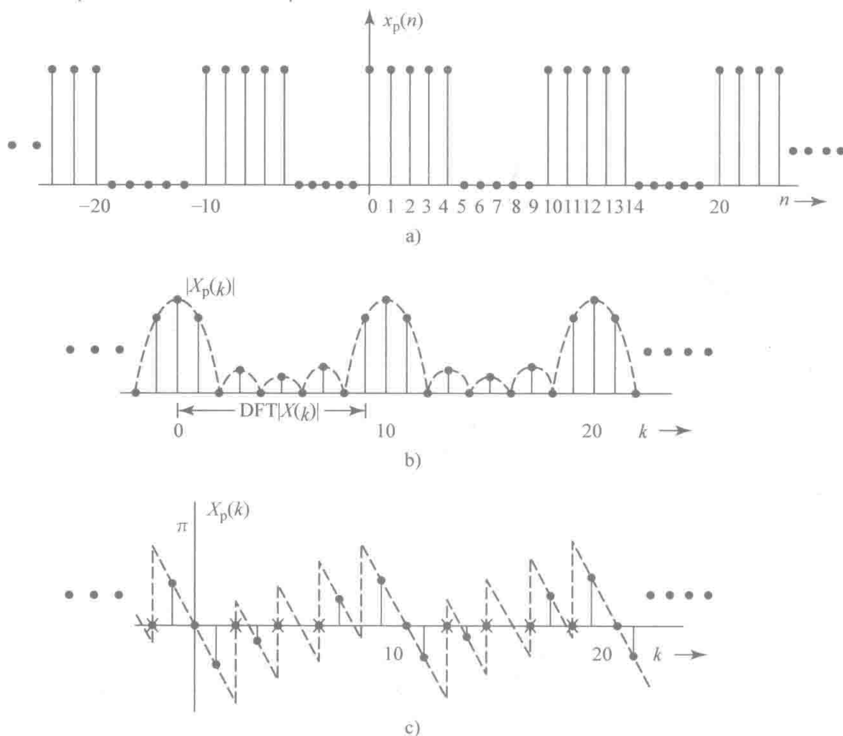


图 3.29

a）一个周期性的信号 b）幅度响应 c）相位响应

通过对比式（3.73）和式（3.67），我们注意到下列要点。记住，由式（3.67）给出的 $X(e^{j\omega})$ 是一个非周期序列的 DTFT，它可能为有限的或无限的长度。但是，当我们假设它是有限长度 N 的信号时，此时有 $x_p(n)=x(n), n=0, 1, 2, \cdots, (N-1)$，得到 DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

在式（3.73）中，我们在 N 个离散频率 ω_k 处估计 DTFT 的值，并除以 N 后得到 $X_p(k)$。从式（3.70）看到，$x_p(n)$离散傅里叶级数系数 $X_p(k)$也是离散时间周期序列 $x_p(n)$的傅里叶级数系数，而且它们也被称为 $x_p(n)$的频谱成分。换句话说，一个周期信号的傅里叶级数系数是 $x(n)$在离散频率 ω_k 处 DTFT 值的 1/N 倍。重写 $X_p(k)=(1/N)X(e^{j\omega k})$，$X(e^{j\omega})$是一个序列的 DTFT。这个结果是基于假设 $x(n)$是一个有限长度为 N 的序列。

3.6.3 离散傅里叶变换

在本节后将讨论 DTFS - IDTFS 对的性质。这里使用式（3.75）得到的结论，对所有的 n 值式（3.75）是有效的（即为 $-\infty < n < \infty$），那么对 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 或任何长度 N 的序列也有效；同样，式（3.76）在 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 也是有效的。因此我们将 $X_p(k)$；$0 \leqslant n \leqslant N-1$ 用符号 $X(k)$ 表示，而我们已经表达 $x(n) = x_p(n)$；$0 \leqslant n \leqslant N-1$：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j(2\pi/N)kn} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}, 0 \leqslant n \leqslant N-1 \quad (3.77)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, 0 \leqslant k \leqslant N-1 \quad (3.78)$$

请注意，我们没有从任何新理论得到这些属性，仅定义它们作为上述得出的 DTFS - IDTFS 无限长序列的一部分。

还要注意，而式（3.75）被称为 $x_p(n)$ 的离散时间傅里叶级数（DTFS）表示，$X_p(k)$ 是傅里叶级数的系数［式（3.76）是 IDTFS］，式（3.78）被称为离散时间傅里叶变换（DFT）［式（3.77）称为逆 DFT（IDFT）］！在 3.6.1 节和 3.6.2 节，请注意，我们使用不同的符号来区分 DTFT - IDTFT 对与 DFT - IDFT 对。

在大多数的教科书中，在 MATLAB 中，DFT - IDFT 简单定义如下，没有推导 DTFS 的任何理论参照。也要注意到，在定义如式（3.79）和式（3.80）所示的 DFT - IDFT 对时，比例因子（1/N）已经从式（3.78）移至式（3.77）（在剩余的内容中我们将使用这两个 DFT - IDFT 方程）：

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j(2\pi/N)kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}, 0 \leqslant n \leqslant N-1 \quad (3.79)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, 0 \leqslant k \leqslant N-1 \quad (3.80)$$

在图 3.29b 中，我们证明了 DFT 为傅里叶级数系数 $X_p(k)$，$k = 0, 1, 2, \cdots, (N-1)$ 的一个子集。但我们可以选择其他 N 个连续样本作为 $x(n)$ 的 DFT $\{$如 $-[(N-1)/2] \leqslant n \leqslant [(N-1)/2]\}$，所以我们将使用符号 $\langle N \rangle = n$ 模 N 表示 n 是一个周期 N 范围内的数。

给定一个非周期的离散函数 $x(n)$，构造一个数学式 $x_p(n)$ 并得到它的傅里叶级数表达式，同时推导它的逆变换得到 $x_p(n)$。然后我们定义了上述所说的 DFT 和 IDFT，这样，可以确定，非周期函数的频率响应的样本是 DTFT $X(e^{j\omega})$ 在 N 等距的空间点 $\omega_k = (2\pi/N)k$ 上的值。我们知道 $x(n)$ 是非周期的，但因为 $X(e^{j\omega})$ 为 2π 周期，$X(e^{j\omega k}) = X_p(k)$ 的周期为 N，所以在式（3.79）和式（3.80）

中可以选择 $n=\langle N\rangle$。

DFT 和 IDFT 的两个方程给我们一个数值算法，可以得到至少 N 个频率的离散频率响应，通过选择一个较大的值 N，我们得到一个得到 $x(n)$ 的频率响应的相对好的想法[⊖]。将在下面证明从 $X(k)$ 确实可以重构 $x(n)$ 的 DTFT = $X(e^{j\omega})$，它是一个连续变量 ω 的函数。香农重构公式从样本 $x(n)$ 得到 $x(t)$ 的对应部分，假定 $x(n)$ 是带限的和采样周期 $T_s<(\pi/\omega_b)$。为重构 $X(e^{j\omega})$ 从其样本 $X(e^{j\omega_k})=X(k)$，在推导频域公式时由一些类似的条件要满足。

3.6.4 由 DFT 重构 DTFT

首先考虑 $x(n)$ 的 DTFT 和由式（3.79）替换 $x(n)$ 寻找 $X(k)$ 的 IDFT 如下：

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j(2\pi kn/N)}\right]e^{-j\omega n}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi kn/N)}e^{-j\omega n}\end{aligned} \tag{3.81}$$

现在，在式 $\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi kn/N)}e^{-j\omega n}$ 中使用式（3.52）并简化，如下所示：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi kn/N)}e^{-j\omega n} &= \frac{1-e^{-j(\omega N-2\pi k)}}{1-e^{-j[\omega-(2\pi k/N)]}}\\ &= \frac{e^{-j[(\omega N-2\pi k)/2]}}{e^{-j[(\omega N-2\pi k)/2N]}}\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\omega N-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega N-2\pi k}{2N}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\dfrac{\omega N-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega N-2\pi k}{2N}\right)}e^{-j[\omega-(2\pi k/N)][(N-1)/2]}\end{aligned} \tag{3.82}$$

在式（3.81）中代换最后一个表达式，得到重建 DTFT $X(e^{j\omega})$ 的最终结果，只使用了有限数量的 DFT 样本 $X(k)$，如下给出：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{\sin\left(\dfrac{\omega N-2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega N-2\pi k}{2N}\right)}e^{-j[\omega-(2\pi k/N)][(N-1)/2]} \tag{3.83}$$

如果 $x(n)$ 有 M 个样本，在 $[0,2\pi]$ 内 N 个点上采样 $x(e^{j\omega})$，其中 $N>M$，N 点 IDFT 将产生 N 个离散时间域样本。可以说明这个结果将产生 N 点序列（在时

⊖ 后来我们将讨论所谓的“栅栏围栏效应”，由于该效应，我们始终得不到较好的频率响应。

域）的混叠。所以用 $(N-M)$[㊀]个零点填充 $x(n)$ 使它成为有一个长度为 N 的离散函数；否则，必须选择 $N \leqslant M$。在这种情况下，采样间隔满足条件 $(2\pi/N) \geqslant (2\pi/M)$，这同时域中满足香农重建公式的采样周期 $T \leqslant (1/2B)$ 相对应。为了满足这个在频域重建条件，我们通过用零来填充使 $M=N$，以避免在离散时间上的混叠。

3.6.5 DTFS 和 DFT 的特性

我们已经列出了如表3.1所示的一些 DTFT 的特性。因为样本的 DFT $X(k)$ 是傅里叶级数系数的一个子集 $X_p(k)$，$X_p(k)$ 和 $X(K)$ 及 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$ 之间有一些相似性。表3.3和表3.4分别列出了 $X_p(k)$ 和 $X(K)$ 的特性，这也显示了一些相似之处。

表3.3 DTFS 系数的特性

性质	周期为 N 的信号 $x(n)$ 和 $y(n)$	DTFS 系数 $X_p(k)$ $X_p(k)$ 和 $Y_k(k)$
线性	$ax(n)+by(n)$	$aX_p(k)+bY_p(k)$
周期卷积	$x(n)\circledast y(n)$	$X_p(k)Y_p(k)$
时移	$x(n-k)$	$e^{-j(2\pi/N)km}X_p(k)=W_N^{km}X_p(k)$
频移	$e^{j(2\pi/N)mn}x(n)=W^{-mn}x(n)$	$X_p(k-m)$
时域反转	$x(-n)$	$X_p(-k)$
相乘	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_p(m)Y_p(k-m)$
共轭	$x^*(n)$	$X_p^*(-k)$
$x(n)$的偶部	$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$	$\mathrm{Re}[X_p(k)]$
$x(n)$的奇部	$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$	$j\mathrm{Im}[X_p(k)]$
对称	$x(n)$是实数序列	$X_p(k)=X_p^*(-k)$ $\mathrm{Re}X_p(k)=\mathrm{Re}X_p(-k)$ $\mathrm{Im}X_p(k)=-\mathrm{Im}X_p(-k)$ $\lvert X_p(k)\rvert=\lvert X_p(-k)\rvert$ $\measuredangle X_p(k)=-\measuredangle X_p(-k)$

再次强调，DFT $X(k)$ 通常是定义在一个周期，$k=0,1,2,\cdots,(N-1)$，此范围之外可认为零。

㊀ 原书为 $M-N$，有误。——译者注

表 3.4　DFT 系数的特性

性质	长度为 N 的信号 $x(n)$ 和 $y(n)$	DFT 系数 $X(k)$ 及 $Y(k)$，长度为 N
线性	$ax(n)+by(n)$	$aX(k)+bY(k)$
卷积	$\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y[(n-m)]_N$	$X(k)Y(k)$
时移	$x(n-m)_N$	$e^{-j(2\pi/N)km}X(k)=W_N^{km}X(k)$
频移	$e^{j(2\pi/N)mn}x(n)=W^{-mn}x(n)$	$X[(k-m)]_N$
相乘	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X(m)Y[(k-m)]_N$
共轭	$x^*(n)$	$X^*[(-k)]_N$
$x(n)$的偶部	$x_e(n)=\frac{1}{2}\{x(n)+x^*[(-n)]_N\}$	$\mathrm{Re}X(k)$
$x(n)$的奇部	$x_o(n)=\frac{1}{2}\{x(n)-x^*[(-n)]_N\}$	$j\mathrm{Im}X(k)$
		$X(k)=X^*[(-k)]_N$
		$\mathrm{Re}X(k)=\mathrm{Re}X[(-k)]_N$
		$\mathrm{Im}X(k)=-\mathrm{Im}X[(-k)]_N$
		$\lvert X(k)\rvert=\lvert X[(-k)]_N\rvert$
		$\measuredangle X(k)=-\measuredangle X_p[(-k)]_N$

在表 3.4 中，使用了一个符号 $X[(-k)]_N$，这表示选择 DTFS 系数 $X_p(k)$，使用时域反转获得 $X_p(-k)$，然后选择任何 N 个样本构成一个周期。双括号下标 N 要求三个操作：选择 DTFS 系数 $X_p(k)$，执行括号内的操作，然后选择 $n=0, 1, 2, \cdots, (N-1)$ 或 n 模 N。这再次证实了，所有操作都是由 DTFS 运算，然后选择结果的一个周期作为 $x(n)$ 的 DFT。当进行 $x(n)$ 和 $f(n)$ 的 DTFS 的周期性的卷积，并选择在 $n=0, 1, 2, \cdots, (N-1)$ 时卷积的值，这非常有意义。我们通过例 3.17 说明此问题。

例 3.17

令 $x(n)=[1.0\ 1.0\ 0.6\ 0.6]$ 和 $f(n)=[1.0\ 0.6\ 0.4]$。可以使用两者之一任何一种方法很容易地求输出 $y_1(n)$：卷积和 $y_1(n)=x(n)*f(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)f(n-m)$ 或者是两个转换之一，即利用 $x(n)$ 和 $f(n)$ 的 z 变换和离散时间傅里叶变换（DTFT），并求 $[(X(z)F(z)]$ 的逆 z 变换，或求 $[X(e^{jw})F(e^{jw})]$ 的傅里叶逆变换 DTFT。的确，可以证明卷积和 $y_1(n)=x(n)*f(n)$ 的 z 变换是 $[X(z)F(z)]$。因此，这两种方法的结果一致，得到的输出 $y_1(n)=[1.0\ 1.6\ 1.6\ 1.36\ 0.6\ 0.24]$，这是一个长度为 6 的序列。它被确定为线性卷积的结果。这三个序列如图 3.30 所示，包括对图形进行线性卷积的过程。

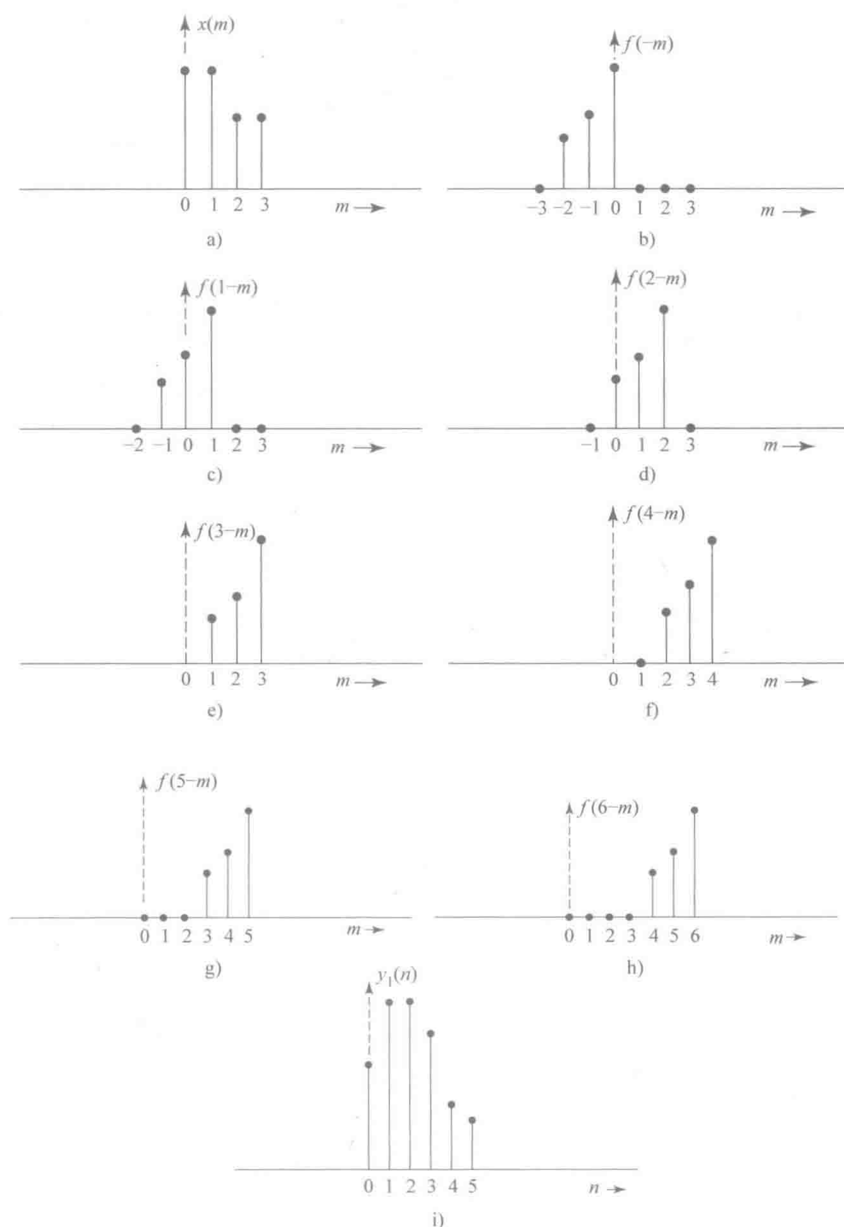


图 3.30　$x(n)$和$f(n)$的线性卷积

现在提出下面的问题。如果通过扩展$x(n)$和$f(n)$产生周期序列$x_p(n)$和$f_p(n)$计算 DTFS，将$X_p(k)$与$F_p(k)$相乘，再求乘积$[X_p(k)F_p(k)]$的逆 DTFS 得到y_p

(n)，我们会得到什么？从表3.3中，我们注意到$X_p(k)F_p(k)$是周期序列卷积$x(n)$ ⊛$f(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)f(n-m)_N=y_p(n)$的DTFS，此可以分析证明。下面将提供一个数值例子来验证这个性质。然而，这个周期序列卷积结果与我们熟悉的线性卷积结果匹配吗？下面展示的示例中选择的$y_p(n)$不是$y_1(n)$的周期拓展，也就是说，周期性卷积结果和线性卷积结果在选择的例子中不匹配。

例3.18

$x(n)$DTFS系数，当选择$N=4$时，计算的公式为$X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)kn}$

$$X_p(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(0\cdot n)}=x(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+x(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+x(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+x(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}=3.2$$

$$X_p(1)=\sum_{n=0}^{3}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(1\cdot n)}=x(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+x(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(1)}+x(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(2)}+x(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(3)}=-0.4-\mathrm{j}0.4$$

$$X_p(2)=\sum_{n=0}^{3}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(2\cdot n)}=x(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+x(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(2)}+x(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(4)}+x(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(6)}=0.0+\mathrm{j}0.0$$

$$X_p(3)=\sum_{n=0}^{3}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(3\cdot n)}=x(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+x(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(3)}+x(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(6)}+x(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(9)}=0.4+\mathrm{j}0.4$$

同样，$f(n)$的DTFT计算

$$F_p(0)=\sum_{n=0}^{3}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(0\cdot n)}=f(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+f(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+f(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+f(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}=2.0$$

$$F_p(1)=\sum_{n=0}^{3}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(1\cdot n)}=f(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+f(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(1)}+f(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(2)}+f(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(3)}=0.6-\mathrm{j}0.6$$

$$F_p(2)=\sum_{n=0}^{3}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(2\cdot n)}=f(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+f(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(2)}+f(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(4)}+f(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(6)}=0.8+\mathrm{j}0.0$$

$$F_p(3)=\sum_{n=0}^{3}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)(3\cdot n)}=f(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(0)}+f(1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(3)}+f(2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(6)}+f(3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/4)(9)}=0.6+\mathrm{j}0.6$$

这些向量的积产生输出DTFS $Y_p(k)=X_p(k)F_p(k)$

$$Y_p(k) = [6.4 \quad 0 \quad -j0.48 \quad 0+j0 \quad 0.0+j0.48]$$

及其逆 DTFS 计算公式

$$y_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} Y_p(k)e^{j(2\pi/N)kn}$$

得到 $y_p(n) = [1.6 \quad 1.84 \quad 1.6 \quad 1.36]$。

直接使用周期性卷积公式的 $x(n) \circledast f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)f(n-m)_N$，如图 3.31 所示，$y_p(n)$得到同样的结果。这验证了周期性卷积 $x(n) \circledast f(n)$ 的 DTFS 的性质为 $X_p(k)F_p(k)$。

但是我们注意到，这个结果同线性卷积 $y_1(n) = x(n) * f(n) = [1.0\ 1.6\ 1.6\ 1.36\ 0.6\ 0.24]$是不匹配的。很明显，$y_1(n)$的长度为6，而 $x_p(n)$、$f_p(n)$、$X_p(k)$、$F_p(k)$和 $y_p(n)$长度都是4，仅出于这个原因，我们也不期望这两个结果相匹配。如果仔细观察图3.31和图3.30，可以看到它们不匹配的另一个原因。在图3.31中，$f(4-m)$、$f(5-m)$、$f(6-m)$、$f(7-m)$分别同序列$f(0)$、$f(1-m)$、$f(2-m)$、$f(3-m)$相同；因此 $y_p(n)$周期为4，而 $y_1(n)$是非周期的，长度为6。当计算 $y_p(n)$时，我们看到相邻周期的附加项的积被加进来，而当计算 $y_1(n)$时，没有这样的重叠。所以，为了避免这种重叠，选择 $N=8$ 并计算 $X_p(k)$、$F_p(k)$和 $y_p(n)$如下。

例 3.19

$$\begin{aligned}
X_p(0) &= \sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j(2\pi/N)(0\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(0)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/8)(0)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(0)} = 3.2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_p(1) &= \sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j(2\pi/N)(1\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/4)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(1)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(2)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/8)(3)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(7)} = 1.2828 - j1.7314
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_p(2) &= \sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j(2\pi/N)(2\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(2)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(4)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/8)(6)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(14)} = 0.4 - j0.4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_p(3) &= \sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j(2\pi/N)(3\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(3)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(6)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/4)(9)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(21)} = 0.7172 - j0.5314
\end{aligned}$$

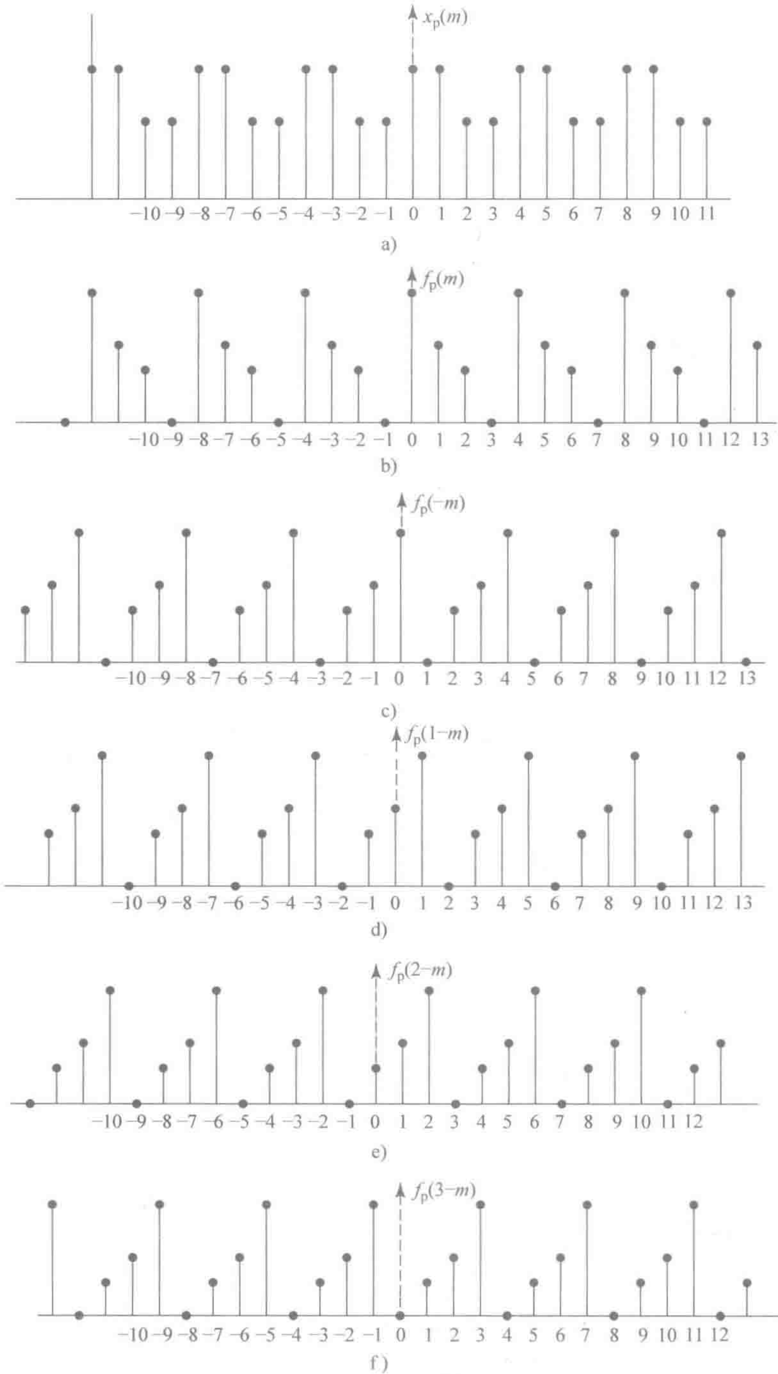


图 3.31　$N=4$ 时 $x_p(n)$ 和 $f_p(n)$ 的循环（周期）卷积

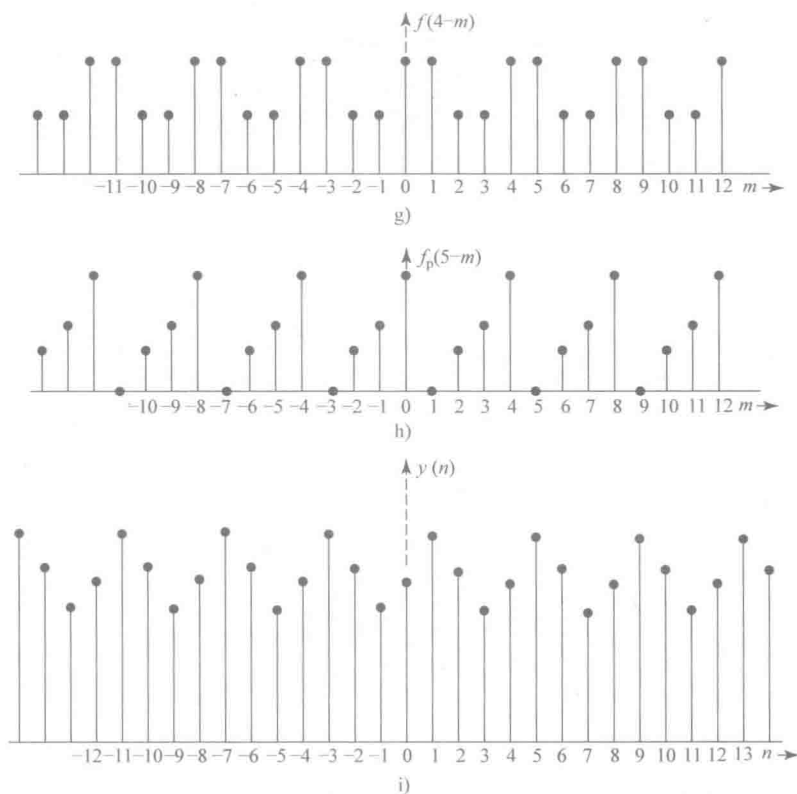


图 3.31　$N=4$ 时 $x_p(n)$ 和 $f_p(n)$ 的循环（周期）卷积（续）

$$
\begin{aligned}
X_p(4) &= \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j(2\pi/N)(4\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(4)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(8)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/4)(12)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(28)} = 0.0 + j0.0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_p(5) &= \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j(2\pi/N)(5\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(5)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(10)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/4)(15)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(35)} = 0.7172 + j0.5314
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_p(6) &= \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j(2\pi/N)(6\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(6)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(12)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/4)(18)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(42)} = 0.4 + j0.4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_p(7) &= \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j(2\pi/N)(7\cdot n)} \\
&= x(0)e^{-j(2\pi/8)(0)} + x(1)e^{-j(2\pi/8)(7)} + x(2)e^{-j(2\pi/8)(14)} \\
&\quad + x(3)e^{-j(2\pi/4)(21)} + \cdots + x(7)e^{-j(2\pi/8)(49)} = 1.2828 + j1.7314
\end{aligned}
$$

同样的，计算 $F_p(k)$，当 $N=8$ 得到向量

$$F_p(k)=[2.0 \quad 1.4243-j0.8423 \quad 0.6-j0.6 \quad 0.5757-j0.0243 \quad 0.8+j0.0 \quad 0.5757+j0.0243 \quad 0.6+j0.6 \quad 1.4243+j0.8423]$$

$X_p(k)$和 $F_p(k)$ 点积后产生

$$Y_p(k)=[6.4 \quad 0.4-j3.5233 \quad 0.0-j0.48 \quad 0.4-j0.3233 \quad 0.0+j0.0 \quad 0.4+j0.3233 \quad 0.0+j0.48 \quad 0.4+j3.5233]$$

和由 $y_p(n)=1/N\sum_{k=0}^{7}Y_p(k)e^{j(2\pi/N)kn}$ 计算 DTFS 获得 $y_p(n)=[1.0\ 1.6\ 1.6\ 1.36\ 0.6\ 0.24\ 0.0\ 0.0]$。

如图 3.32 和图 3.33 所示，从周期性的卷积得到同样的结果。进一步说，我们看到这个结果是匹配线性卷积得到的！

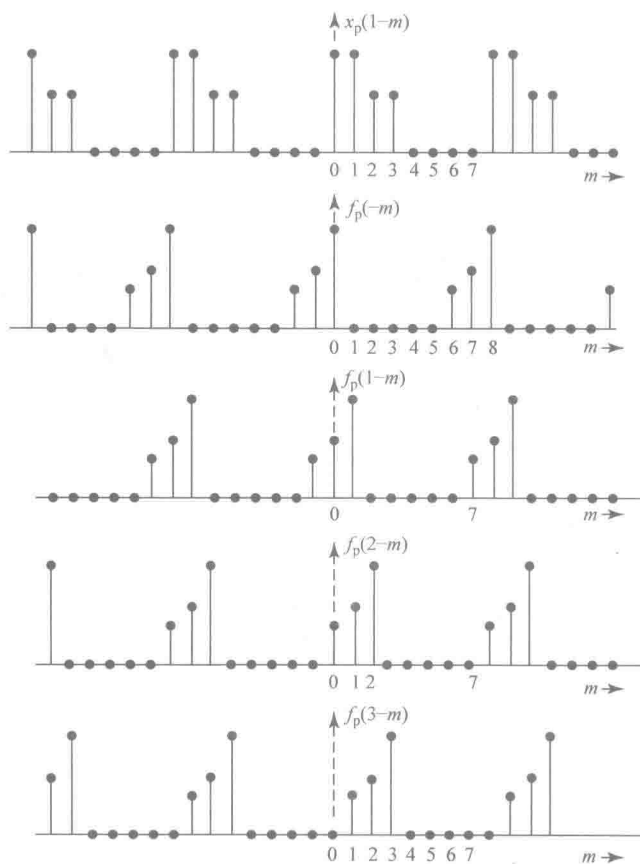


图 3.32 $N=8$ 时 $x_p(n)$和$f_p(n)$的循环卷积

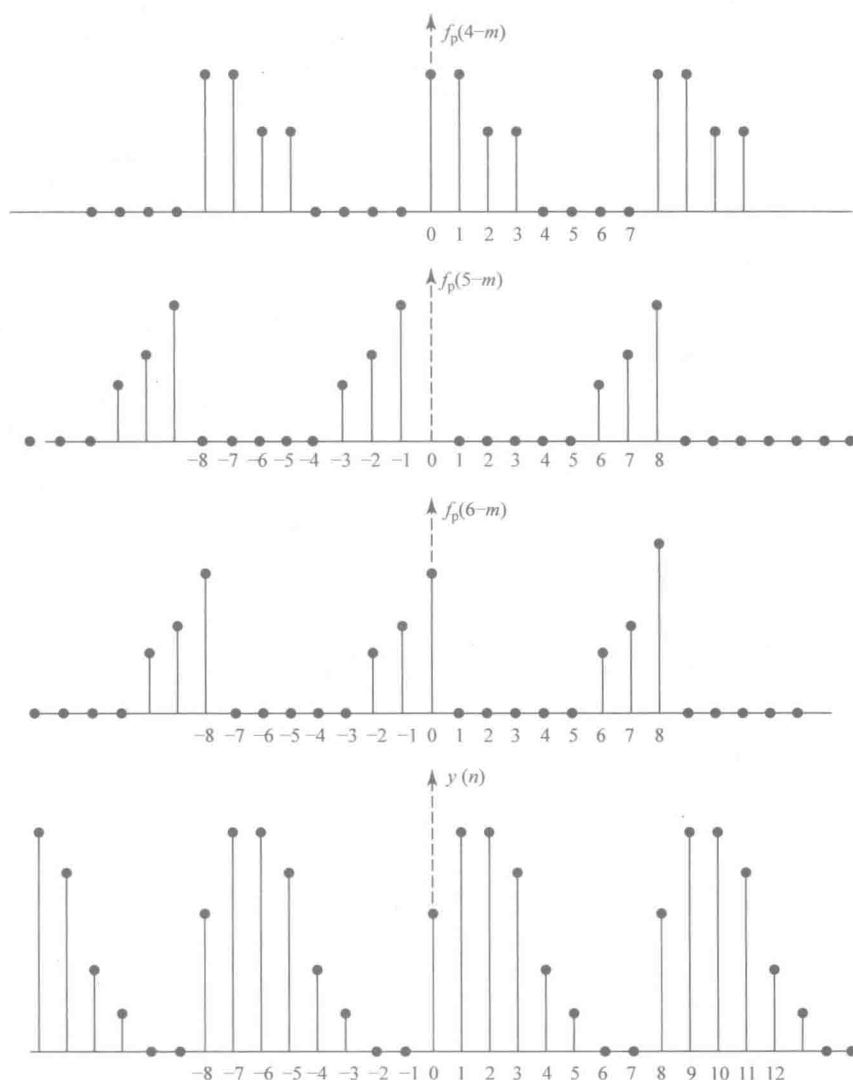


图 3.33 $x_p(n)$和$f_p(n)$与的循环卷积 $N=8$（续图 3.32[㊀]）

一般来说，如果$x(n)$的长度是l_1，$f(n)$的长度是l_2，我们知道，线性卷积$y_1(n)$的长度将为l_1+l_2-1。所以，使线性卷积和周期性卷积结果相匹配要做的是选择N等于或大于l_1+l_2-1。有了这样一个选择，我们可以使用 DTFS 系数$X_p(k)$和$F_p(k)$，它们的长度$N \geqslant l_1+l_2-1$，然后计算$X_p(k)F_p(K)$的N点逆 DTFS。因为公式计算 DFT 的 N 个系数［即$X(k)$和$F(k)$］和计算它们的N个

㊀ 原书为图 3.34 续，有误。——译者注

DFTS 系数一样，因此 DFT（和逆 DFT）系数是 DTFS（IDTFS）系数的一个子集，我们得出结论，如果我们给定，就是说，长度为 l_1 的 $x(n)$ 作为输入信号长度为 l_2 的 $h(n)$ 作为线性离散时间系统的单位冲激响应，那么我们可以给每个信号补适当数量的零使它们两个长度 $N \geqslant l_1 + l_2 - 1$，然后求 $X(k)H(k)$ 的逆 DFT 得到线性离散系统输出 $y(n)$ 的 N 个样本。相反，如果我们有任何信号，我们可以很容易地获得其 DFT 的 N 个系数，这意味该信号频率响应等间隔分配在 $0 \sim 2\pi$ 范围内的 N 个频率点上。

3.7 快速傅里叶变换

请注意，在上面实例中当我们计算 DFT 的 8 个样本的每个值时，有复数乘法 $e^{j(2\pi/N)kn} = W^{-kn}, k = 0,1,2,\ldots,(N-1)$，有信号的 8 个实值样本而且乘积被加起来。所以在计算 DFT 8 个样本的过程中，乘法的总数是 $8^2 = 64$，而加法的数量是 $7^2 = 49$。求逆 DFT 需要相同数量的加法和乘法。在这种情况下，样本 $X(k)$ 和 W^{-kn} 都是复数。一般来说，使用式（3.79）和式（3.80）直接计算 DFT 和 IDFT 需要 N^2 个乘法，$(N-1)^2$ 个加法；为提高给定信号频率响应 $X(k)$ 分辨率或根据给定的滤波器频率响应的 IDFT 求滤波器单位冲激响应时，需要选择 N 很大，加乘运算数也会非常大。

快速傅里叶变换（FFT）是一种被开发的能大大提升运算效率的数值算法，是数字信号处理中频谱分析最受欢迎的算法，具体地说，为求信号的 DFT 和求频率响应逆 DFT 得到离散时间信号最受欢迎的算法。这只是一个计算算法而不是另一个变换。在此 FFT 算法中，当基数 N 的值选择为 2^R，R 是一个整数，复乘法数是（$N/2$）$\log_2(N)$，复加法次数是（N）$\log_2(N)$。作为效率展示，选择 $N = 256$；在这种情况下，在直接运算中，复乘法次数是 65536，在 FFT 运算中，复乘法数量是 1024，这是一个 64 倍的改善。随着 N 增加到更高的值，改善系数增加很明显，例如，当 $N = 1024$ 时，实现 204 倍的改善。

基于基数 $N = 4$ 的算法已经开发，进一步提高了计算效率。当卷积信号长度很大时（如 $N = 1024$），一些新颖的 FFT 改进算法也被提出。它们被称为“叠加算法和叠留算法。在这些方法中，信号被分解为一系列较短的长度的连续段，对它行进行卷积的基本运算，然后仔细地将这些响应相加得到的结果与对原始信号直接做 FFT 的结果一样。MATLAB 函数 y = fftfilt（b，x）和 y = fftfilt（b，x，N）实现输入信号 x 与 FIR 滤波器单位冲激响应之间应用叠加算法的卷积，默认 N 是 512，但它在第二个命令中可以改变成其他任何值包含。

3.8 使用 MATLAB 计算 DFT 和 IDFT

例 3.20

选择和前面相同的例子：即让 $x(n)=[1.0\ 1.0\ 0.6\ 0.6]$。首先计算其 DTFT 并绘制在图 3.34 中。然后使用 MATLAB 信号工具箱中的函数 fft 计算 10 点 DFT。函数通过以下简单的命令表述：

```
[X,w] = fft(x,N)
```

在这个函数中，X 是给定信号 $x(n)$ 的 DFT 复值矢量，N 是基数的值，在本例中选择为 10。计算 DFT 的绝对值，幅值为 $|X(k)|$，$k=0, 1, 2, \cdots, 9$，叠加在同一幅图中。可以看到，在离散频率 $e^{j(2\pi/10)k}$，$k=0, 1, 2, \cdots, 9$，频率点处，DFT 结果与 DTFT 结果相同，和期望的一样。但是选择 $N=10$ 这个例子为特别说明所谓的“栅栏效应”。注意，图 3.34 中的频率响应有一个局部最小值位于归一化频率 2.5 和 7.5 点。但是如果仅绘制 DFT 值图，会错过这样一个事实：信号的频率响应在这些频率有一个最小值。如果信号为单一正弦频率，其频率响应是一个冲激函数，在对应归一化频率处将出现一个峰值，这种现象将变得严重。因为我们选择一个较低的值 N，因此基频 $2\pi/N$ 是相对较大的，很可能这个单一频率存在点被完全错过了。这就是所谓的“栅栏效应”，正像我们通过一个栅栏看连续频率响应而错过了栅栏后面一部分频率响应一样。因此重要的是要选

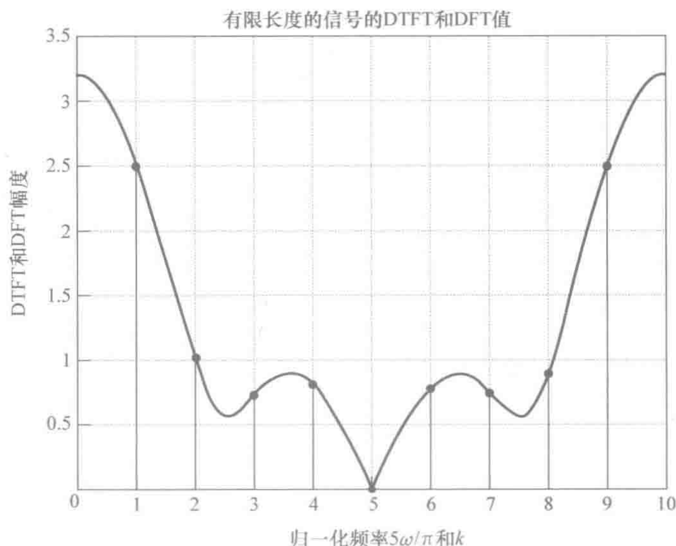


图 3.34 DTFT/DFT 图

择一个相当高的基数 N 值，这样我们将有更少的机会错过单一频率但同时没有过高的值，这将增加计算时间。

当使用 MATLAB 信号处理时，强烈建议学生全面理解这一理论。在这个例子中，当使用 MATLAB 函数计算 DFT 时，它的输出实际上是显示为 $k=1, 2, 3, \cdots, N$，因为 MATLAB 函数计算 $x(n)$ 的 fft 将按照下面算法

$$X(k+1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+1)W_N^{kn} \tag{3.84}$$

和按照下式计算逆 DFT $n=1, 2, 3, \cdots, N$

$$x(n+1)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k+1)W^{-kn} \tag{3.85}$$

而从理论我们知道，这两个指数都从 $0\sim(N-1)$，MATLAB 显示的频率响应归一范围在 $[0\ \pi]$。

在 DTFT 图上叠加 DFT 值过程中，这种现象在 MATLAB 函数 fft 中很重要。在数字信号处理使用 MATLAB 过程中，它作为一个全面理解这一理论的例子是必要的。

例 3.21

现在考虑另一个例子，以此说明 MATLAB 函数 fft(x,N) 的使用，并比较离散时间信号频率响应（DTFT）与其 DFT 值。选择信号 $x(n)=\sin[0.1(\pi n)]$，$0\leqslant n\leqslant 10$，绘制在图 3.35 中。`[h,w] = freqz(x,1,'whole')` 求频率响应，在

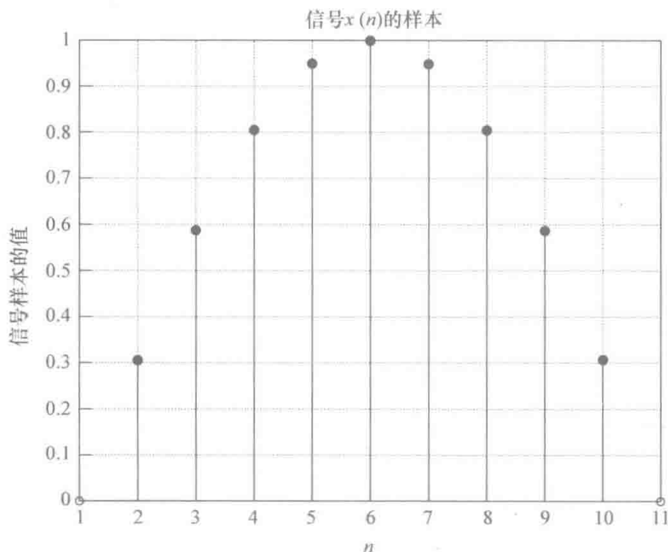


图 3.35 一个离散时间信号

2π 全周期绘图如 3.36 所示，为了比较它与 DFT $X(k)$ 的值，它总是给 N 个样本 $0 \leqslant k \leqslant (N-1)$，对应全频率范围 [0 2π]。DFT $X(k)$ 用 MATLAB 函数 `X = fft(x,64)` 计算。$X(k)$ 的绝对值绘制在图 3.37 中，它与 $|X(e^{j\omega})|$ 匹配。

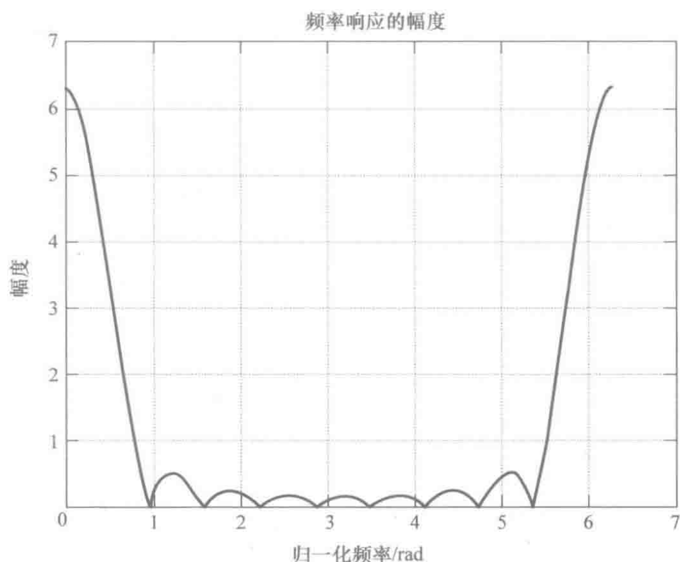


图 3.36 一个信号 DTFT 的幅度响应

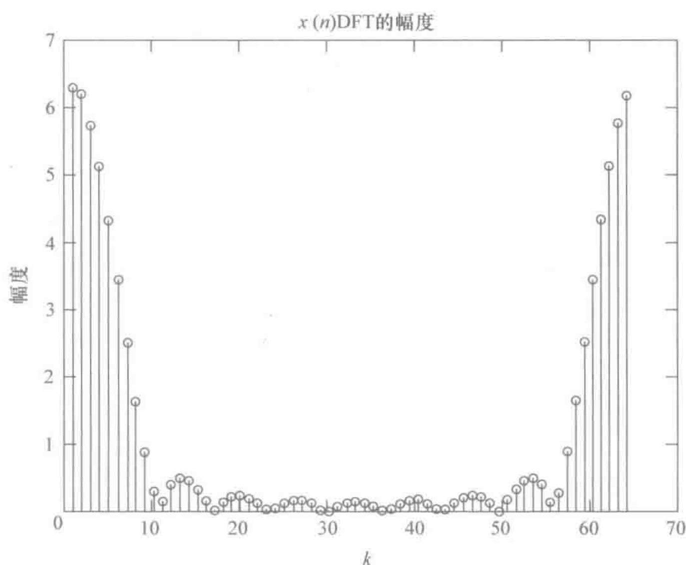


图 3.37 信号 DFT 的幅度

例 3.22

在这个例子中，考虑相同的信号 $x(n)=[1\ 1\ 0.6\ 0.6]$ 和 $h(n)=[1\ 0.6\ 0.4]$，与例 3.17 一样，用 FFT 技术求离散时间系统输出 $y(n)$。使用的 MATLAB 程序和最终的程序输出如下：

```
x = [ 1  1  0.6  0.6];
h = [ 1  0.6  0.4];
X=fft(x,8);
H=fft(h,8);
Y=X.*H;
y=ifft(Y,8)
```

输出为

$$y=1.0000\ 1.6000\ 1.6000\ 1.3600\ 0.6000\ 0.2400\ 0\ 0$$

在这个程序中，MATLAB 函数 `y=ifft(y,8)` 计算 $X(k)H(k)$ 积的 8 点 IFFT，最后一行为输出 $y(n)$，与 $x(n)*h(n)$ 线性卷积结果一致，这并不奇怪。

例 3.23

考虑一个如下给出的低通滤波器响应的 DFT 样本，使用 MATLAB 函数 `x = ifft(x,8)` 计算并绘制 $x(n)$ 的输出。MATLAB 程序和输出 $x(n)$ 由下面给出，如图 3.38 所示。再次强调的是，在 8 点 IDFT 中 n 是从 1 ~ 8 而不是从 0 ~ 7：

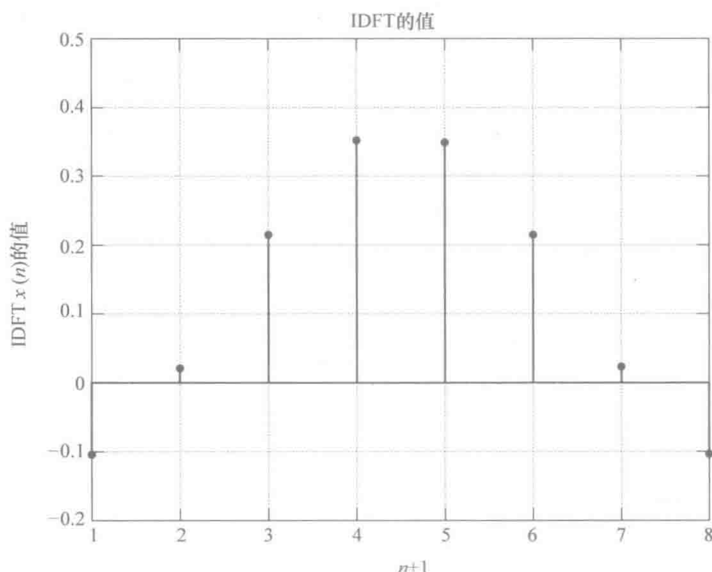


图 3.38 低通滤波器的 IDFT

```
X=[1 exp(-j*7*pi/8) 0 0 0 0 0 exp(j*7*pi/8)];
x=ifft(X,8);
stem(x)
title('Values of the IDFT')
ylabel('Values of the IDFT')
xlabel('Index n')

x
```

输出为

-0.1060 0.0293 0.2207 0.3560 0.3560 0.2207 0.0293 -0.1060

3.9 小结

在这一章里，我们已经讨论了几个话题。首先，我们表明，如果信号是带限的，而且以大于信号最高频率两倍的频率采样，则可以用信号的数字信号处理代替信号的模拟信号处理，因为数字信号中包含了模拟信号所有信息。解释了香农采样定理和从数字样本重建模拟信号的公式。这种模拟信号采样时，离散时间信号的频率响应是一个数字频率的连续函数，但它是周期的，而且周期等于采样频率。接着讨论了离散时间信号频率响应（DTFT）的几个性质，并用数值例子加以说明；其概括如下：

非周期的信号 $x(n)$ 的 DTFT：

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{3.86}$$

$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的 IDTFT：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{3.87}$$

然后我们考虑一个周期为 N 的离散时间信号。其傅里叶级数用傅里叶级数系数形式表达，给出了从傅里叶级数系数求周期性离散时间信号值的公式。讨论了离散时间傅里叶级数（DTFS）和逆 DTFS，并用实例说明。其总结如下：

周期为 N 的周期信号的 DTFS：

$$x_{\mathrm{p}}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-kn}, \ -\infty \leqslant n \leqslant \infty \tag{3.88}$$

周期为 N 的 $X(k)$ 的 IDTFS：

$$X_{\mathrm{p}}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn}, \ -\infty \leqslant k \leqslant \infty \tag{3.89}$$

离散傅里叶变换（DFT）和它的逆（IDFT）是 DTFS 和 IDTFS 系数的一个子集，源自于周期性 DTFS 和 IDTFS 系数。它们可以被视为非周期序列。几个运行

实例说明在离散频率点的 DTFT 估值与 DFT 系数值一样：

长度 N 的 $x(n)$ 的 DFT：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{kn},0\leqslant k\leqslant(N-1) \quad (3.90)$$

长度 N 的 $X(k)$ 的 IDFT：

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-kn},0\leqslant n\leqslant(N-1) \quad (3.91)$$

计算 DFT－IDFT 系数的 FFT 算法提供了非常高的计算效率，因此广泛用于信号处理、滤波器分析和设计中。它提供了一个统一的从时域到频域响应的计算方法，反之亦然。本章增加了更多的例子，用来说明 MATLAB 中 FFT 及 IFFT 函数的使用，提供了从离散时间信号求解离散时间系统的频率响应及从频率响应得到离散时间信号的普遍框架。需要记住的是，在本书中，离散时间（数字）信号，序列，或函数这些术语会被互换使用；离散时间傅里叶变换（DTFT）、频率响应和频谱这些术语也在本章同义使用。

习题

3.1　一个信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-0.1t}u(t)$，采样生成一个 DT 信号 $f(n)$，它以很高频率采样，假定没有混叠。求 $f(n)$ 的频率响应闭式表达式。

3.2　求信号 $x(t)=t\mathrm{e}^{-0.1t}u(t)$ 的傅里叶变换 $X(\mathrm{j}\omega)$ 和选择一个衰减超过 60dB 的频率点。假设信号被此频率带限，请问采样信号 $x(t)$ 不丢失太多信息的最小采样频率是多少？

3.3　一个连续时间函数 $f(t)$，200Hz 的带宽，1000Hz 采样频率，采样值 $f(nT)=\{\underset{\uparrow}{1.0}\ 0.4\ 0.1\ 0.001\}$。求 $t=0.005$ 时的 $f(t)$ 值。

3.4　一个带限模拟信号 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$ 如图 3.39 所示。最大采样周期 T 是多少可以避免采样序列 $f(n)$ 的频率响应 $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 不产生混叠？求 $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的傅里叶级数系数。

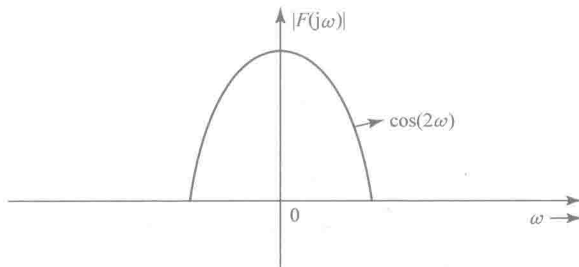


图 3.39　问题 3.4

3.5 求$x(n)=\{-1\ 1\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ -1\}$的 DTFT，求在 $j\omega=j0.4\pi$ 处的值。如果计算了 $x(n)$ 的 10 点 DFT $X_k(j\omega_k)$，k 值是多少时 DFT 等于 $X(e^{j0.4\pi})$？

3.6 求一个有限序列$\{\underset{\uparrow}{1.0}\ 0.0\ -1.0\}$的 DTFT，估算它在 $\omega=0.5\pi$ 的值。计算 $\omega=0.5\pi$ 处的 DTFT 值，使用这个序列的 DFT 来验证这个结果。

3.7 求下列两个序列的 DTFT：

(a) $x_1(n)=10(0.5)^n\cos(0.2\pi n+\pi/3)u(n)$

(b) $x_2(n)=n(0.2)^n u(n)$

3.8 求 $x_1(n)=(0.5)^n u(n)$ 和 $x_2(n)=(0.5)^n$ 的 DTFT；$-5\leqslant n\leqslant 5$。

3.9 求下列序列的 DTFT

$x_1(n)=u(n)-u(n-6)$

$x_2(n)=(0.5)^n u(n+3)$

$x_3(n)=(0.5)^{n+3}u(n)$

$x_4(n)=(0.5)^{-n+2}u(-n+2)$

$x_5(n)=(0.3)^{n-2}u(-n+2)$

3.10 求下列两个函数的 DTFT：

(a) $x_1(n)=x(-n-2)$, $x(n)=e^{-0.5n}u(n)$

(b) $x_2(n)=5^{-n}(u)$

3.11 假定 $x_1(n)=\{1\quad 0\quad -1\quad 0\}$ 的 DTFT 为 $X_1(e^{j\omega})$，请以 $X_1(e^{j\omega})$ 的形式表示 $x_2(n)=\{1\quad 0\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0\quad -1\quad 0\}$ 的 DTFT，请以 $X_1(e^{j\omega})$ 的形式表示 $x_3(n)=\{1\quad 0\quad -1\quad 1\quad 0\quad -1\quad 0\quad 0\}$ 的 DTFT。

3.12 一个 LTI－DT 系统由差分方程描述如下

$$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)-bx(n-1)$$

确定一个除 0.5 之外的 b 值，使传递函数的 $H(e^{j\omega})$ 幅值二次方在所有频率处都等于 b^2。

3.13 一个梳状滤波器的传递函数定义为 $H(z)=(1-z^{-N})/N$。$N=10$，确定滤波器频率响应的闭式表达式。

3.14 证明下述表达式表示的 IIR 滤波器的幅度响应是 ω 实函数和 ω 的偶函数。

$$H(z)=\frac{2+0.2z^{-1}-0.2z^{-3}-2z^{-4}}{(1-z^{-4})}$$

3.15 一个离散时间信号经过一个频率响应为常数 5，带宽等于 0.4π 的低通滤波器后，再经过一个通频带在 $\omega_{p1}=0.3\pi$ 和 $\omega_{p2}=0.6\pi$ 的，幅度为 4 的带通滤波器。输出信号的带宽是多少？

3.16 一个 DT 信号 $x(n)=4\cos(0.4\pi n)+6\cos(0.8\pi n)+10\cos(0.9\pi n)$ 为

输入，通过一个全通滤波器，在所有频率上幅度均为5。求滤波器的输出 $y(n)$。

3.17　给定 $x(n)=a^n u(n)$ 和 $h(n)=b^n u(n)$，其中 $0<a<1$，$0<b<1$，$a\neq b$，证明 $y(n)=x(n)*h(n)\equiv(a^{n+1}-b^{n+1})/(a-b)$。

3.18　求 $x(n)=n^2(0.1)^n u(n)$ 的 DTFT。

3.19　证明

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}=\begin{cases}N & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

3.20　证明下列序列的频率响应

$$x(n)=\begin{cases}1 & -N\leqslant n\leqslant N\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

是 $X(e^{j\omega})=1+2\sum_{n=1}^{N}\cos(\omega n)=\sin(N+0.5)\omega/\sin(0.5\omega)$。

3.21　证明 $\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=2\pi x(0)$，其中 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}$。

3.22　假定 $H(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 如下所示，求离散时间系统的输出 $y(n)$

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{1-0.6e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega})=2e^{-j\omega}-5e^{-j5\omega}+e^{-j6\omega}$$

3.23　假定 $H(e^{j\omega})$ 和 $X(e^{j\omega})$ 如下所示，求输出 $y(n)$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{e^{j\omega}+0.3}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{(1+0.5e^{-j\omega})(1-0.5e^{j\omega})}$$

3.24　求下列函数的 IDTFT：

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j2\omega}}{(1+0.2e^{j\omega})(1-0.4e^{-j\omega})(e^{j\omega}+0.5)}$$

3.25　求下列函数的 IDTFT：

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{(e^{j\omega}+0.1)(1-e^{-j\omega})(1+e^{j\omega})}$$

3.26　如果 LTI－DT 系统的输入 $x(n)=(0.2)^n u(-n)$，它的单位冲激响应 $h(n)$ 是 $(0.4)^n u(n)$，其输出 $y(n)$ 是什么？

3.27　给定一个输入 $x(n)=(0.2)^{-n}u(-n)+(0.5)^n u(n)$，LTI－DT 系统的单位冲激响应为 $(0.4)^n u(n)$，求输出 $y(n)$。

3.28　给定一个序列 $x_1(n)=(0.3)^{-n}u(-n)$ 和另一个序列 $x_2(n)=(0.6)^n u(-n)$，用 DTFT 求卷积和 $x_1(n)*x_2(n)$。

3.29　求卷积 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$，其中，$x_1(n)=0.5^{-n}u(-n)$，$x_2(n)=(0.2)^{-n}u(-n)$。

3.30　求 $x(n)=(0.4)^n u(n)$ 的 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 的 DTFT，其中 $x_e(n)=$

$[x(n)+x(-n)]/2$是$x(n)$的偶部，$x_o(n)=[x(n)-x(-n)]/2$是$x(n)$奇部。

3.31 求下列函数的 IDTFT

$$F(e^{j\omega})=e^{j\omega}/[(1-0.4e^{-j\omega})(1+0.4e^{-j\omega})(1+0.4e^{j\omega})]$$

3.32 求$X(e^{j\omega})=3e^{j3\omega}/(e^{j\omega}-0.4)$的 IDTFT。

3.33 求 IDTFT

(a) $X(e^{j\omega})=\cos^2(4\omega)$

(b) $X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \omega_{c1}\leqslant\omega\leqslant\omega_{c2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

3.34 求函数$X(e^{j\omega})=1+4\cos(\omega)+3\cos(5\omega)$的 IDTFT。

3.35 求下列两个函数的 IDTFT：

(a) $H_1(e^{j\omega})=1+2\cos(\omega)+4\cos(2\omega)$

(b) $H_2(e^{j\omega})=1+2\cos(\omega)+4\cos^2(2\omega)$

3.36 求函数$H_1(e^{j\omega})=1+4\cos(\omega)+3\cos(5\omega)\omega S(\omega)$ 的 IDTFT。

3.37 求下列函数的 IDTFT：

(a) $Y_1(e^{j\omega})=j\sin(\omega)[4+4\cos(\omega)+2\cos^2(\omega)]$

(b) $Y_2(e^{j\omega})=je^{-j(\omega/2)}[4+2\cos(\omega)+4\cos^2(\omega)]\sin(\omega/2)$

3.38 求如图 3.40 所示$H_2(e^{j\omega})$的 IDTFT。求周期函数$H_2(e^{j\omega})$的傅里叶级数系数。

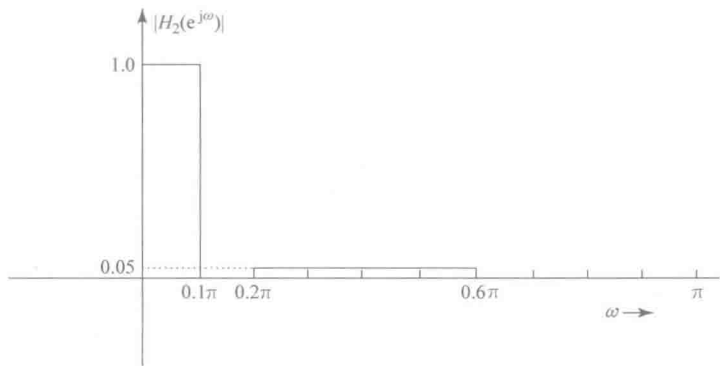


图 3.40 习题 3.38

3.39 一个 FIR 滤波器定义为$H(z^{-1})=1+0.5z^{-1}+0.4z^{-2}+0.4z^{-3}$。利用 DFT 公式，求频率响应在$\omega=0.8\pi$处的幅值。

3.40 计算序列$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1.0}\ \ 0.3\ \ 0.2\ \ 0.5\}$ DFT 的$X_8(3)$和$X_{16}(6)$。

3.41 一个离散时间序列$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}$，采样频率 2400Hz，已知在 600Hz 的 DTFT 值是$\sqrt{2}$。求 6600Hz 处的幅值是多少？计算其 8 点 DFT 的样本$X_8(2)$。

3.42 给定$f(n)$的 6 点 DFT，计算$f(3)$的值：

$F(0)=10.0; F(1)=-3.5-j2.6; F(2)=-2.5-j0.866$

$F(3)=-2.0; F(4)=-2.5+j0.866; F(5)=-3.5+j2.6$

3.43 计算下列 $X(k)$ 的 6 点 IDFT：

$X(k)=\{3+j0 \quad -1+j0 \quad -0+j1.732 \quad 5+j0 \quad 0-j1.732 \quad -1-j0\}$

3.44 如果 n 点实序列 $x(n)$ 的 DFT 为 $X_N(k)$，请使用 $x[(-n)]_N=X(N-n)$ 的性质证明 $x[(-n)]_N$ 的 DFT 为 $X_N^*(k)$。其中请以 $\mathrm{Re}X(k)$ 表示 $x_e(n)=[x(n)+x(-n)]/2$ 的偶数部分，以 $j\mathrm{Im}X(k)$ 表示 $x_o(n)=[X(n)-x(-n)]/2$ 的奇数部分。

3.45 求下列函数的偶部与奇部：

$x_1(n)=\{1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1\}$

$x_2(n)=\{1 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1\}$

$x_3(n)=\{1 \quad 1 \quad -1 \quad 3\}$

$x_4(n)=\{0 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \quad 0\}$

3.46 确定下列哪些函数有实值 DFT，哪些有虚值 DFT：

$x_1(n)=\{1 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0.5\}$

$x_2(n)=\{1 \quad 0.5 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0.5\}$

$x_3(n)=\{0 \quad 0.5 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad -0.5\}$

$x_4(n)=\{1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -2\}$

3.47 计算 $x(n)=\{1 \quad 0.5 \quad -1.5\}$ 的 4 点和 8 点 DFT。绘图并比较它们的值。

3.48 计算 $x(n)=\{1 \quad 0.5 \quad -1.5\}$ 的 5 点 DFT。

3.49 计算 $x(n)=\{1 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad -0.5\}$ 的 6 点 DFT。

3.50 给定下列 8 点 DFT 样本

$$X(1)=1.7071-j5858$$
$$X(3)=0.2929+j4.4142$$
$$X(6)=-0+j2$$

求 $X(2)$、$X(5)$、$X(7)$ 的值。

3.51 给出一个 128 点 DFT 函数 $X(4)$、$X(13)$、$X(17)$、$X(65)$、$X(81)$ 和 $X(90)$ 的值，$X(124)$、$X(63)$、$X(115)$、$X(38)$、$X(111)$ 和 $X(47)$ 值是多少?

MATLAB 习题

3.52 计算 4 点序列 $x(n)=\{1 \quad 0.5 \quad 0 \quad -0.5\}$ 的 16 点和 32 点 DFT，并比较它们。

3.53 计算题 3.52 中序列的 24 点 DFT，绘制此 DFT 幅度图。再计算此 DFT 的 24 点 IDFT，并与上面给出的 $x(n)$ 比较。

3.54 绘出下列函数的幅度图：

$$X_1(z)=\frac{0.5+1.2z^{-1}}{1+0.2z^{-1}+0.4z^{-2}+z^{-3}-z^{-4}+0.06z^{-5}}$$

$$X_2(z)=\frac{z^{-3}-0.8z^{-5}+z^{-1}-6}{1+z^{-1}+0.8z^{-2}-0.4z^{-3}-0.3z^{-4}+z^{-5}+0.05z^{-6}}$$

$$X_3(z)=\frac{(1-0.3z)(1+0.2z+z^2)}{(z^2+0.2z+1.0)(z^2-0.1z+0.05)(z-0.3)}$$

$$X_4(z)=\frac{z}{z+0.4}-\frac{z+0.5}{(z+0.1)^2}+\frac{0.8}{z}$$

3.55 绘出下列函数的幅度和相位响应：

$$H_1(e^{j\omega})=\frac{0.2e^{j\omega}+0.9e^{j2\omega}}{1-0.6e^{j\omega}+0.6e^{j2\omega}-0.5e^{j3\omega}+e^{j4\omega}}$$

$$H_2(e^{j\omega})=\frac{1+0.4e^{-j\omega}}{1+0.5e^{-j\omega}-0.4e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega}+0.3e^{-j4\omega}+0.1e^{-j5\omega}}$$

$$H_3(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$$

3.56 估算传递函数 $H(z)$ 幅度响应在 $\omega=0.365\pi$ 和 $\omega=0.635\pi$ 的值：

$$H(z)=\frac{0.25+z^{-1}}{1-0.8z^{-1}+0.4z^{-2}-0.05z^{-3}}$$

3.57 实序列 $x(n)=\{1\ \ -1\ \ 2\ \ 0.5\ \ 0\ \ -1\ \ 2\ \ 1\}$，证明 $\mathrm{DFT}[x_e(n)]=\mathrm{Re}X(k)$，偶部 $x_e(n)=[x(n)+x((-n))_N]/2$。

3.58 从习题3.57实序列获得其奇部，并证明其 $\mathrm{DFT}=\mathrm{jIm}X(k)$。

参考文献

1. B. A. Shenoi, *Magnitude and Delay Approximation of 1-D and 2-D Digital Filters*, Springer-Verlag, 1999.
2. C. E. Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE* **37**, 10–12 (Jan. 1949).
3. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing-Principles, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, 1966.
4. B. P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press, 1998.
5. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
6. V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*$^{(R)}$ *V.4*, PWS Publishing, 1997.
7. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing—A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 2001.
8. S. K. Mitra and J. F. Kaiser, eds., *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1993.
9. A. Antoniou, *Digital Filters, Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, 1993.

第 4 章　无限冲激响应滤波器

4.1　简介

在第 2 章，我们讨论了离散时间系统的分析，获得了基于时间域给定输入序列的输出，使用的是递归算法、卷积和 z 变换技术。在第 3 章，我们通过推导 DTFT 或系统频率响应，介绍了频域中响应的概念。这两章和第 1 章专注于 DT 系统分析。现在我们讨论当给定传递函数或其等效模型时这些系统的综合。如果给定输入与输出序列，很容易找到传递函数 $H(z)$，即输出 z 变换与输入 z 变换之比。然而，如果以绘图形式指定系统的频率响应，如通带和阻带频率以及对应频带范围及相位，和指定要求允许的公差，找到这些要求的传递函数是基于近似理论。有许多著名的找到传递函数的方法，使在给定频域内接近要求指标。在这一章，我们将讨论一些 IIR 滤波器的设计方法，能接近低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器的幅度响应要求指标。通常数字滤波器的指标按归一化频率给出。在许多应用中，模拟滤波器的指标由数字滤波器以前端 ADC 与接收端 DAC 结合方式实现，这些指标要求是模拟域形式。理想经典模拟滤波器的幅度响应如图 4.1 所示。几个 IIR 滤波器的设计例子也包括在这一章中，通过使用 MATLAB 函数，来说明进行任意幅度响应的滤波器的设计。近似频域指标要求的 FIR 滤波器设计将在下一章讨论。

选择下列任何一个方法指定 IIR 滤波器。递归算法如下

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) \tag{4.1}$$

它的等价形式是一个线性差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k);\ a(0) = 1 \tag{4.2}$$

IIR 滤波器的传递函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a(k)z^{-k}};\ a(0) = 1 \tag{4.3}$$

让我们考虑传递函数在单位圆 $z = e^{j\omega}$ 上的一些特性，ω 是弧度归一化频率：

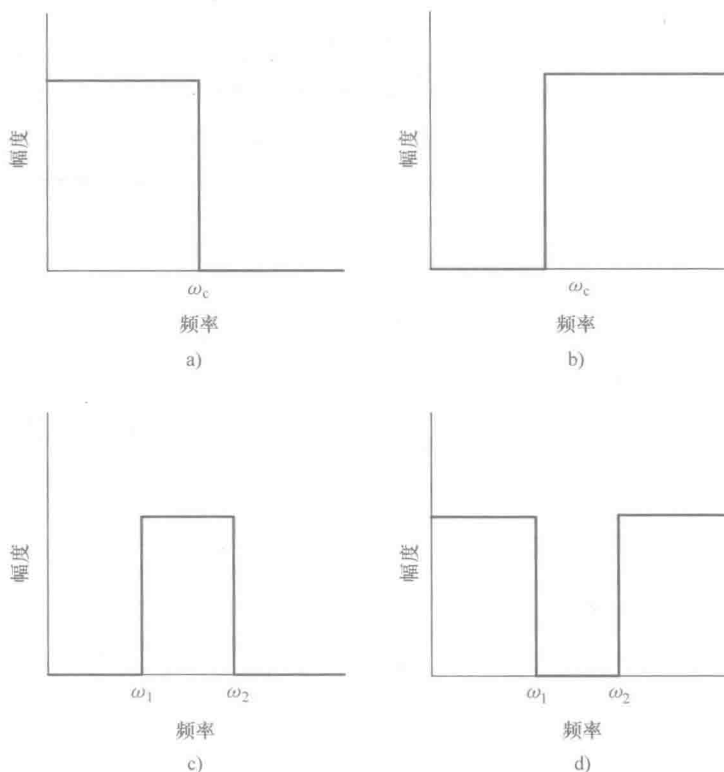


图 4.1　模拟滤波器的幅度响应
a）低通滤波器　b）高通滤波器
c）带通滤波器　d）带阻滤波器

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)\cos(k\omega) - \mathrm{j}\sum_{k=0}^{M} b(k)\sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^{N} a(k)\cos(k\omega) - \mathrm{j}\sum_{k=0}^{M} a(k)\sin(k\omega)} = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\mathrm{j}\omega)} \tag{4.4}$$

在这个方程中，$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是频率响应，或滤波器的离散时间傅里叶变换（DT-FT），$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$是幅度响应，$\theta(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是相位响应。如果 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = |X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha(\omega)}$ 是输入信号的频率响应，其中$|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$是幅度响应，$\alpha(\omega)$是它的相位响应，那么频率响应 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = |X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})||H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\{\alpha(\omega)+\theta(\omega)\}}$。因此输出信号的幅度是输入信号幅度乘以幅度$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$，相位是同相位 $\theta(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$相加：

$$|H(e^{j\omega})| = \left\{\frac{\left[\sum_{k=0}^{M} b(k)\cos(k\omega)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{M} b(k)\sin(k\omega)\right]^2}{\left[\sum_{k=0}^{N} a(k)\cos(k\omega)\right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{M} a(k)\sin(k\omega)\right]^2}\right\}^{1/2} \tag{4.5}$$

$$\theta(j\omega) = -\arctan\frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)\sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^{M} b(k)\cos(k\omega)} + \arctan\frac{\sum_{k=0}^{N} a(k)\sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^{N} a(k)\cos(k\omega)} \tag{4.6}$$[⊖]

幅度二次方函数为

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})| \tag{4.7}$$

其中 $H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的复共轭。可以证明，幅度响应是 ω 的偶函数，而相位响应是 ω 奇函数。

计算和绘制 $|H(e^{j\omega})|$ 的对数幅度 $10\lg|H(e^{j\omega})|^2$（以分贝为单位）很方便。我们也注意到，$H(e^{j\omega})/H(e^{-j\omega}) = e^{j2\theta(j\omega)}$。群时延 $\tau(j\omega)$ 被定义为 $\tau(j\omega) = -[d\theta(j\omega)]/d\omega$，从以下公式计算

$$\tau(\omega) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{d\omega} - \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{d\omega} \tag{4.8}$$

其中

$$u = \frac{\sum_{k=0}^{M} b(k)\sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^{M} b(k)\cos(k\omega)} \tag{4.9}$$

$$v = \frac{\sum_{k=0}^{N} a(k)\sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^{N} a(k)\cos(k\omega)} \tag{4.10}$$

设计 IIR 滤波器通常意味着找到一个如（4.3）形式的传递函数 $H(z)$，其幅度响应（或相位响应，群时延，或者幅度和群时延）以一定准则接近要求指标。例如，我们可能想要通过一个常数放大输入信号而没有任何延迟或一个恒定的延迟。但很容易看到，滤波器的幅度响应或延迟一般不是一个常数，它们只能近似滤波器的传递函数。数字滤波器的设计（和模拟滤波器的设计），有三个常用的近似准则：巴特沃斯近似、极大极小（等波纹或切比雪夫）近似和最小 p 次近似或最小二乘近似。在本章我们将用相同的顺序讨论它们。设计一个数字滤波器也意味着我们获得一个电路实现或对应其性能的时域算法，这在第 6 章中讨论。这也意味着滤波器的设计由不同类型的硬件实现，这在第 7 章和第 8 章中讨论。

⊖ 原书等号右侧第二项为 $\tan^{-1}\frac{\sum_{k=0}^{M} a(k)\sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^{N} a(k)\cos(k\omega)}$，有误。——译者注

两种分析方法常用于 IIR 数字滤波器的设计，而它们很大程度上依赖于连续时间滤波器也称为模拟过滤器，设计的近似理论。因此，在讨论 IIR 数字滤波器的设计之前，我们回顾一下模拟滤波器幅度近似理论是有必要的。

4.2　模拟滤波器的幅度近似

模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ 是复频率变量的有理函数，实系数形式如下㊀：

$$H(s)=\frac{c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots+c_ms^m}{d_0+d_1s+d_2s^2+\cdots+d_ns^n},\ m\leqslant n \tag{4.11}$$

滤波器的傅里叶变换或频率响应得到的是频率 ω 的函数㊁，当作一个 $\mathrm{j}\omega$ 函数估算 $H(s)$。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{c_0+\mathrm{j}c_1\omega-c_2\omega^2-\mathrm{j}c_3\omega^4+c_4\omega^4+\cdots+(\mathrm{j})^mc_m\omega^m}{d_0+\mathrm{j}d_1\omega-d_2\omega^2-\mathrm{j}d_3\omega^3+d_4\omega^4+\cdots+(\mathrm{j})^nc_n\omega^n} \tag{4.12}$$

$$=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)} \tag{4.13}$$

$H(\mathrm{j}\omega)$ 是频率响应，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 是幅度响应，$\theta(\mathrm{j}\omega)$ 是相位响应。还可以从下面两式求幅度二次方和相位响应：

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)H^*(\mathrm{j}\omega) \tag{4.14}$$

$$\frac{H(\mathrm{j}\omega)}{H(-\mathrm{j}\omega)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\theta(\omega)} \tag{4.15}$$

模拟滤波器的幅度响应是 ω 的偶函数，而相位响应是一个奇函数。尽管 $H(\mathrm{j}\omega)$ 这些属性类似于 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，但有一些差异。例如，$H(\mathrm{j}\omega)$ 的频率变量 ω（是）用 rad/s 表示，而 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 中的 ω 是归一化弧度频率。幅度响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$（和相位响应）在 ω 双无限区间 $-\infty<\omega<\infty$ 内是非周期的，而 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$（和相位响应）（是）在归一化频率 2π 周期内呈周期性。

例 4.1

以一个模拟函数的传递函数为例

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2} \tag{4.16}$$

第一步是将 $H(s)$ 和 $H(-s)$ 相乘，估算在 $s=\mathrm{j}\omega$ 时的积：

$$\{H(s)H(-s)\}|_{s=\mathrm{j}\omega}=|H(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{4.17}$$

㊀ 4.2～4.10 节所包含内容在出版商 Springer－Verlag 授权下，摘自《1 维与 2 维数字滤波器幅度与延迟近似》。

㊁ 在 4.2～4.8 节中，我们讨论了模拟滤波器的理论，我们使用 ω 与 Ω 来表示角频率（rad/s）。其中符号 ω 不应该被认为是在 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 中使用的归一化数字频率。

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2 = \{H(s)H(-s)\}|_{s=\mathrm{j}\omega} = \left\{\frac{(s+1)(-s+1)}{(s^2+s+2)(s^2-s+2)}\right\}\bigg|_{s=\mathrm{j}\omega} \tag{4.18}$$

$$=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+1} \tag{4.19}$$

从这个例子中看到，为了从式（4.19）的幅度二次方函数中找到式（4.16）的传递函数 $H(s)$，我们逆转上述由 $H(s)$ 得到式（4.19）函数的步骤。换句话说，我们在给定的二次方函数中代替 $\mathrm{j}\omega = s$（或 $\omega^2 = -s^2$）得到 $H(s)H(-s)$，对分子分母因式分解。对于 $H(s)$ 每个极点 s_k（和零点），$H(-s)$ 有一个极点 $-s_k$（和零点）。所以对应 s 相平面左半面每个极点，s 相平面右半面也有一个极点，而且在左右半相平面成复共轭对出现，从而呈象限对称。因此，当对 $H(s)H(-s)$ 因式分解时，选择相平面左半面所有极点作为 $H(s)$ 的极点，留下其镜像右半面极点作为 $H(-s)$ 极点。这样能保证传递函数是一种稳定函数。同样，选择左半相平面零点作为 $H(s)$ 零点，但是我们可以自由选择右半平面零点作为 $H(-s)$ 零点，不影响幅值。它改变了 $H(s)$ 的相位响应，产生一个非最小相位响应。考虑一个简单的例子：$F_1(s)=(s+1)$ 和 $F_2(s)=(s-1)$。那么 $F_{22}(s)=(s+1)[(s-1)/(s+1)]$ 和 $F_2(s)$ 有相同的幅度，因为对于所有频率 $(s-1)/(s+1)$ 的幅度等于 $|(\mathrm{j}\omega-1)/(\mathrm{j}\omega+1)|=1$。但由于全通函数 $(s-1)/(s+1)$ 的相位响应，$F_{22}(\mathrm{j}\omega)$ 相位增加了。因此 $F_{22}(s)$ 是一个非最小相位函数。一般来说，Z 平面内任何零点在单位圆内的函数被定义为一个最小相位函数。如果单位圆外面有至少一个零点，那它变成了一个非最小相位函数。

4.2.1　最大限度平坦和巴特沃斯近似

一个理想的低通滤波器的幅度响应如图 4.1a 所示。这个理想低通滤波器能使输入的连续时间信号在 $|\omega|\leqslant\omega_c$ 频率范围内的所有频率分量以相同增益通过，而完全过滤掉所有频带外的信号。在图 4.1c 所示的带通滤波器的响应中，只传输 ω_1 与 ω_2 之间的频率和 $-\omega_1$ 和 $-\omega_2$ 之间的频率，其他所有频率完全被过滤掉。

在图 4.1 中，对于理想的低通滤波器，$0\leqslant\omega\leqslant\omega_c$ 区间的幅度响应显示为一个恒定值被归一化，$\omega_c\leqslant\omega<\infty$ 区间是零。因为幅度响应是一个偶函数，所以我们也知道区间 $-\infty<\omega<0$ 的响应。

对于低通滤波器，频率间隔 $0\leqslant\omega\leqslant\omega_c$ 称为通带，间隔 $\omega_c\leqslant\omega<\infty$ 称为阻带。因为式（4.11）形式的传递函数 $H(s)$ 不能提供这样一个理想的幅度特性，常见的做法是在指标要求的范围内规定误差范围，再由 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 满足。例如，通频带理想幅度 1 的容许偏差 δ_p 和阻带幅度 0 的容许偏差 δ_s，如图 4.2 所示。通带和阻带之间的过渡带容许偏差也在图中显示。这是典型的理想滤波器幅度响应

指标规范。

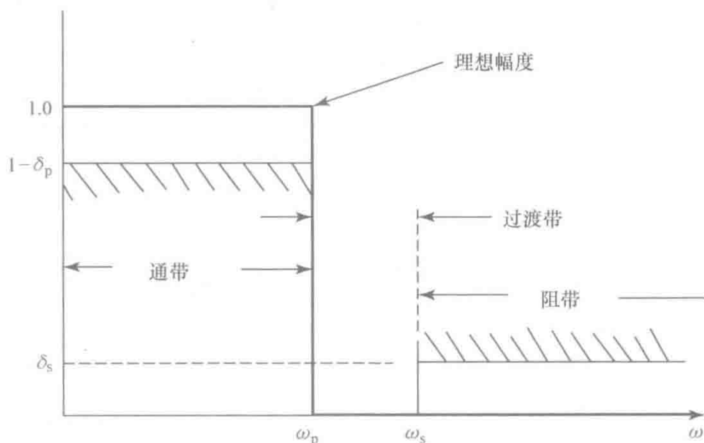


图 4.2　显示误差度的理想低通模拟滤波器的幅度响应

因为幅度二次方函数$|H(\mathrm{j}\omega)|^2 = H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega)$[㊀]是 ω 的偶函数，它的分子和分母只包含偶数阶项；也就是说，它的形式是

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2 = \frac{C_0 + C_2\omega^2 + C_4\omega^4 + \cdots + C_{2m}\omega^{2m}}{1 + D_2\omega^2 + D_4\omega^4 + \cdots + D_{2n}\omega^{2n}} \tag{4.20}$$

为了使它接近理想低通滤波器的幅度，加上下列条件

1）在 $\omega = 0$ 处幅度归一化为 1。

2）$\omega \to \infty$，幅值单调减小到 0。

3）在 $\omega = 0$ 处导数最大数量值为 0。

条件 1 当 $C_0 = 1$ 时满足，当系数 $C_2 = C_4 = \cdots = C_{2m} = 0$ 满足条件 2。除条件 2 满足外，当分母多项式是 $1 + D_{2n}\omega^{2n}$时条件 3 满足。幅度响应满足条件 2 和 3 被称为巴特沃斯响应，而响应只满足条件 3 时被称为最大平坦幅度响应，这可能不是单调递减的。满足这三个条件的二次方函数因此有如下形式

$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2 = \frac{1}{1 + D_{2n}\omega^{2n}} \tag{4.21}$$

通过 ω_p 量化 ω_p 并定义归一化模拟频率 $\Omega = \omega/\omega_\mathrm{p}$，所以这种滤波器的通带 $\Omega_\mathrm{p} = 1$。现在，低通滤波器满足上述三个条件，并且其通带归一化为 $\Omega_\mathrm{p} = 1$。这样一个过滤器被称为原型低通巴特沃斯滤波器，其传递函数 $H(p) = H(s/p)$，幅值二次方函数由下给出

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + D_{2n}\Omega^{2n}} \tag{4.22}$$

㊀　原书为$|H(\mathrm{j}\omega)| = H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega)$，有误。——译者注

下面是一个归一化的低通巴特沃斯滤波器指标：①幅度在 $\omega=0$ 处为 H_o，②带宽 ω_p，③带宽 ω_p 处的幅度，④阻带频率 ω_s，⑤ω_s 处的幅度。具有这些实际指标要求的模拟滤波器的传递函数用 $H(p)$ 表示，将在下面讨论中使用，而原型低通滤波器将用 $H(s)$ 表示。

在开始模拟设计过程之前，为方便，用 H_0 归一化滤波器幅度，用 ω_p 比例化频率 ω_p 和 ω_s 以使原型滤波器的带宽和其阻带频率分别为 $\Omega_p=1$ 和 $\Omega_s=\omega_s/\omega_p$。在 Ω_p 和 Ω_s 处的幅度，通过适当选择函数式（4.22）中的 D_{2n} 和 n 使其满足，解释如下。例如，如果在通带频率处的幅度要求是 $1/\sqrt{2}$，这意味着通带对数幅度需要 -3dB，那么我们选择 $D_{2n}=1$。如果通带频率 $\Omega_p=\Omega_s=1$ 处幅度要求是 $1-\delta_p$，那么我们选择 D_{2n}，用 ε^2 归一化表示，这样

$$|H(\text{j}1)|^2=\frac{1}{1+D_{2n}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2}=(1-\delta_p)^2 \tag{4.23}$$

如果在带宽 $\Omega_p=\Omega_s=1$ 处幅度给定为 $-A_p$ 分贝，则 ε^2 由下式计算

$$10\lg\frac{1}{1+\varepsilon^2}=-A_p$$

$$10\lg(1+\varepsilon^2)=A_p$$

$$\lg(1+\varepsilon^2)=0.1A_p$$

$$1+\varepsilon^2=10^{0.1A_p}$$

从最后一个方程，我们得到公式 $\varepsilon^2=10^{0.1A_p}-1$ 和 $\varepsilon=\sqrt{10^{0.1A_p}-1}$。让我们考虑一下巴特沃斯滤波器常见的一个情况，在 Ω_p 处对数幅度为 -3dB，以此来设计巴特沃斯低通滤波器。在这种情况下，使用的原型滤波器函数形式如下

$$|H(\text{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\Omega^{2n}} \tag{4.24}$$

这满足以下特性：

1）$\Omega=0$ 处滤波器响应幅度的二次方是 1。

2）对于所有整数 n，$\Omega=1$ 处幅度的二次方是 1/2，对数幅度是 -3dB。

3）当 $\Omega\to\infty$，滤波器幅度单调减少到零，渐近速率是 $-40n\text{dB}/10$。

巴特沃斯低通滤波器的 $n=2, 3, \cdots, 6$ 时幅度响应显示在图 4.3 中。不显示滤波器的对数幅度，而是以 dB 形式的衰减如图 4.4 所示。衰减或损失用 dB 定义为

$$-10\lg|H(\text{j}\Omega)|^2=10\lg(1+\Omega^{2n})$$

通带衰减如图 4.4a 所示，对于所有 n，通带内最大衰减是 3dB；对于 $n=1, 2, \cdots, 10$，滤波器在 $1\leqslant\Omega\leqslant10$ 内的衰减特性如图 4.4b 所示。

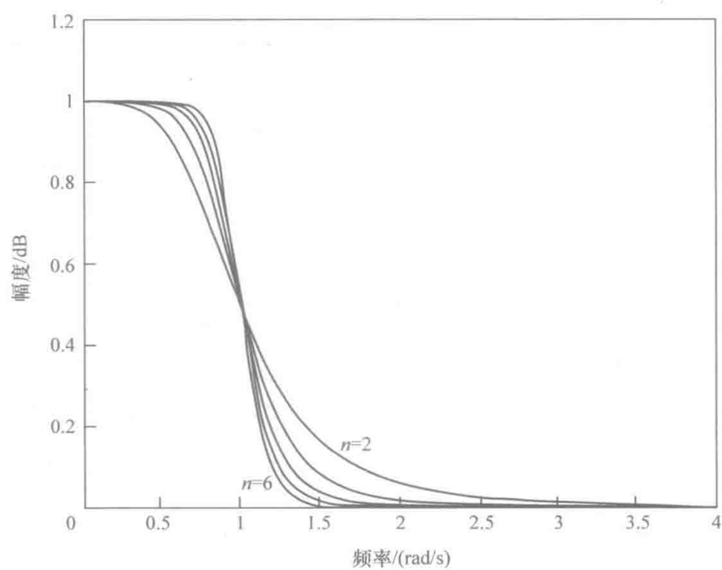


图 4.3　巴特沃斯低通滤波器的幅度响应

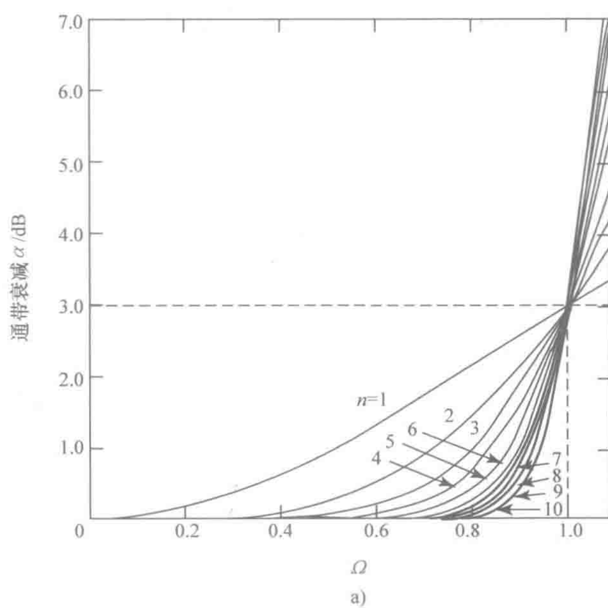


图 4.4　巴特沃斯低通滤波器的衰减特性

a）通带

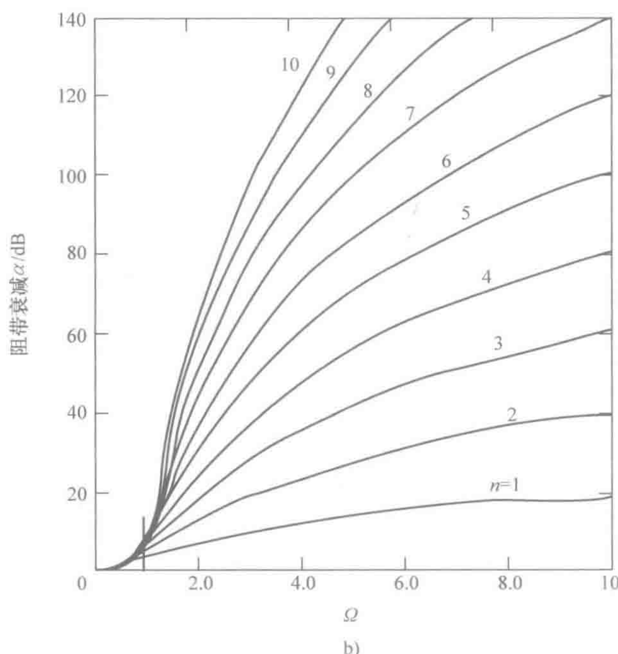


图 4.4 巴特沃斯低通滤波器的衰减特性（续）
b）阻带

4.2.2 巴特沃斯低通滤波器的设计理论

考虑如下条件的巴特沃斯低通滤波器的设计①频率 ω_p 处幅值比 $\omega=0$ 处的最大值低 3dB，②阻带内在另一个频率 ω_s 处幅值被指定。当归一化增益为常数 1 和用比例因子 ω_p 归一化频率时，得到归一化原型滤波器 $\Omega_p=1$ 的截止频率和阻带频率 $\Omega_s=\omega_s/\omega_p$。找到归一化原型低通滤波器的传递函数 $H(p)$ 后，恢复频率和幅度比例得到传递函数 $H(s)$，逼近先前描述的低通滤波器的指标。

过去常用于从原型低通滤波器幅度二次方函数获得 $H(p)$ 的分析过程，只需简单地进行逆过程，即可从 $H(p)$ 得到幅度二次方函数以例 4.1 进行说明。首先，在式（4.24）中做 $\Omega=p/j$ 或 $\Omega^2=-p^2$ 替换：

$$\left.\frac{1}{1+\Omega^{2n}}\right|_{\Omega^2=-p^2}=\frac{1}{1+(-1)^n p^{2n}}=H(p)H(-p) \tag{4.25}$$

通过求解方程，分母有 $2n$ 个零点

$$1+(-)^n p^{2n}=0 \tag{4.26}$$

或方程

$$p^{2n}=\begin{cases}1=e^{j2k\pi} & n\text{ 为奇数}\\ -1=e^{j(2k+1)\pi} & n\text{ 为偶数}\end{cases} \tag{4.27}$$

$H(p)H(-p)$有 $2n$ 个极点，它们是

$$p_k=e^{j(2k\pi/2n)\pi}\quad k=1,2,\cdots,2n\quad n\text{ 为奇数} \tag{4.28}$$

和

$$p_k=e^{j[(2k-1)/2n]\pi}\quad k=1,2,\cdots,2n\quad n\text{ 为偶数} \tag{4.29}$$

或一般表达式

$$p_k=e^{j[(2k+n-1)/2n]\pi}\quad k=1,2,\cdots,2n \tag{4.30}$$

我们注意到，在这两种情况下，极点幅值是 1，沿单位圆任何两个相邻极点间相位差等于 π/n。p 相平面左半边有 n 个极点，右半边也有 n 个极点，图 4.5 列出了 $n=2$ 和 $n=3$ 的情况。对于 $H(p)$ 在左半平面 $p=p_a$ 时的极点，在右半平面，在 $p=-p_a$ 处，$H(-p)$有一个对应极点。因为这个特性，确定 p 平面左半平面的 n 个极点作为 $H(p)$的极点，它是一个稳定的传递函数；右半平面的极点分配作为 $H(-p)$的极点。左边 p 平面的 n 个极点由下给出

$$p_k=\exp\left[j\left(\frac{2k+n-1}{2n}\right)\pi\right]\quad k=1,2,3,...,n \tag{4.31}$$

当找到这 n 个极点，构造原型滤波器 $H(p)=1/D(p)$，分母多项式 $D(p)$为

$$D(p)=\prod_{k=1}^{n}(p-p_k) \tag{4.32}$$

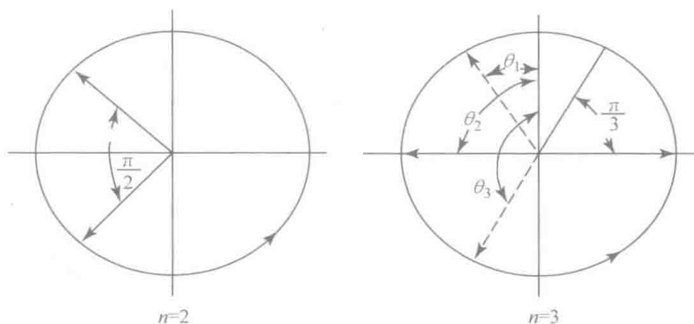


图 4.5　巴特沃斯低通滤波器阶数 $n=2$ 和 $n=3$ 时极点位置

此设计阶段唯一的未知参数是滤波器函数 $H(p)$的阶数 n，是式（4.31）必需的。根据阻带频率 Ω_s 指标要求，对数幅度要求不超过 $-A_s$dB 或阻带最小衰减是 A_sdB 计算。

$$10\lg|H(j\Omega_s)|^2=-10\lg(1+\Omega_s^{2n})\leqslant -A_s \tag{4.33}$$

从上，得到计算 n 的公式如下：

$$n \geqslant \frac{\lg(10^{0.1A_s}-1)}{2\lg\Omega_s} \tag{4.34}$$

因为要求 n 是一个整数，选择的实际 n 值 = $\lceil n \rceil$，是更高值的整数或从式（4.34）右边得到的 n 向上舍入得到。当我们选择 $n = \lceil n \rceil$，阻带的衰减比指定的值 A_s 大一些。在式（4.31）中使用这个整数 n 值计算极点，然后构造 n 阶分母多项式 $D(p)$。通过（$p-p_k$），（$p-p_k^*$）相乘，p_k 和 p_k^* 是复共轭对，多项式被简化成实系数多项式。这些多项式，被称为巴特沃斯多项式，有许多特殊的性质。在多项式形式中，如果表示为

$$D(p) = 1 + d_1 p + d_2 p^2 + \cdots + d_n p^n \tag{4.35}$$

它们的系数可以递归计算（$d_0 = 1$）

$$d_k = \frac{\cos\left[(k-1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{\sin\left[\dfrac{k\pi}{2n}\right]} d_{k-1} \quad k = 1,2,3,\ldots,n \tag{4.36}$$

但是没有必要这样做，因为它们可以从式（4.32）中计算得到。n 到 10 阶的多项式在许多书上都有表列出，在一些书［3.2］中也用因式分解形式[3,2]。在表 4.1 中列出了几个。

表 4.1 巴特沃斯多项式 $D(p)$ 多项式形式和因式分解形式

n	
1	$p+1$
2	$p^2+\sqrt{2}p+1$
3	$p^3+2p^2+2p+1=(p+1)(p^2+p+1)$
4	$p^4+2.61326p^3+3.41421p^2+2.61326p+1=(p^2+0.76537p+1)(p^2+1.84776p+1)$
5	$p^5+3.23607p^4+5.23607p^3+5.23607p^2+3.23607p+1$ $=(p+1)(p^2+0.618034p+1)(p^2+1.931804p+1)$
6	$p^6+3.8637p^5+7.4641p^4+9.1416p^3+7.4641p^2+3.8637p+1$ $=(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9318p+1)$

在低通滤波器的情况下，通常幅值在 $\omega=0$ 处指定，这样幅度也是在 $\Omega=0$ 处的值。因此指定的大小等同于传递函数 $H(p)$ 在 $p=\mathrm{j}0$ 处的值。这等于 $H(\mathrm{j}0)=H_0/D(\mathrm{j}0)=H_0$。所以通过归一化原型滤波器函数相乘 H_0 恢复幅值大小。为恢复被 ω_p 归一化的频率，将 $p=s/\omega_p$ 代入 $H_0/D(p)$ 和简化表达式得到指定低通滤波器的传递函数 $H(s)$。这就完成了设计过程，将在例 4.2 中展示。

例 4.2

设计一个巴特沃斯低通滤波器，最大增益 5dB 和截止频率 1000rad/s 处增益至少 2dB 和阻带频率 5000rad/s 处幅值小于 −25dB。

5dB 的最大增益是滤波器函数在 $\omega=0$ 处的幅度。通带边缘是截止频率 $\omega_p=1000\text{rad/s}$，和频率范围 $0\leqslant\omega\leqslant\omega_p$ 称为带宽。所以我们看到，在这个频率处 2dB 幅值比通频带的最大值低 3dB。我们说滤波器 3dB 带宽等于 1000rad/s。频率选择比例因子是 1000，使原型滤波器的通带 $\Omega_p=1$。阻带频率 ω_s 被指定为 5000rad/s，因此比例扩大 $\Omega_s=5$。幅度被归一化，使归一化原型低通滤波器函数 $H(p)$[㊀] 在 $\Omega=0$ 时幅度为 1（即 0dB）。这种滤波器幅度二次方函数

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\Omega^{2n}} \tag{4.37}$$

降低给定要求到从上述应用推导表达式对应的归一化原型滤波器要求总是有必要的。此例归一化原型滤波器的幅度响应（非比例）如图 4.6a 所示。

对于这个示例，注意，通频带的最大衰减是 $A_p=3\text{dB}$ 和阻带的最小衰减 $A_s=30\text{dB}$。从式（4.34）计算的值 $n=2.1457$，选择 $n=\lceil 2.1457\rceil=3$。从式（4.31），得到三个极点 $p_1=-0.5+\mathrm{j}\sqrt{0.75}$，$p_2=-1.0$ 和 $p_3=-0.5-\mathrm{j}\sqrt{0.75}$。因此从式（4.32）得到三阶分母多项式 $D(p)$ 或从表 4.1 得到：

$$\begin{aligned}D(p)&=(p+0.5-\mathrm{j}\sqrt{0.75})(p+1)(p+0.5+\sqrt{0.75})\\&=(p^2+p+1)(p+1)=p^3+2p^2+2p+1\end{aligned} \tag{4.38}$$

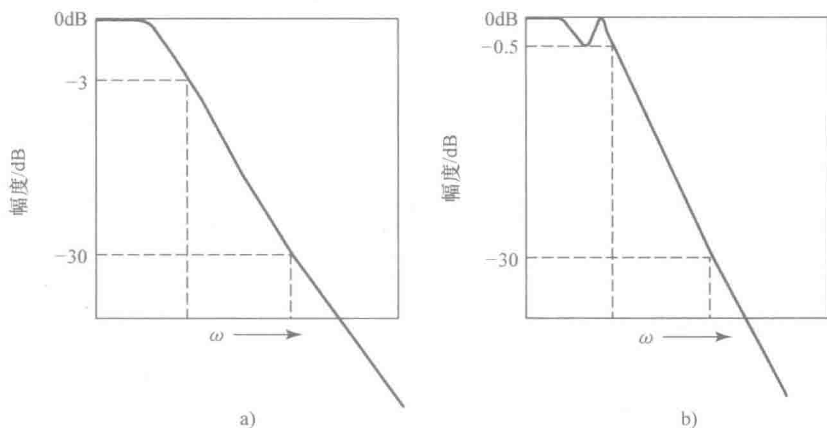


图 4.6　原型滤波器幅度响应

a）巴特沃斯滤波器　b）切比雪夫滤波器（等波纹）

因此归一化三阶原型滤波器的传递函数

㊀ 注意，我们选择 $p=\sum+\mathrm{j}\Omega$ 作为低通原型滤波器传递函数 $H(p)$ 的复频率变量的符号，我们选择 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 作为特定滤波器传递函数 $H(s)$ 的变量。

$$H(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1} \tag{4.39}$$

为恢复幅度比例，用这个函数乘以 H_0。现在的滤波器函数是

$$H(p)=\frac{H_0}{p^3+2p^2+2p+1} \tag{4.40}$$

在 $p=\mathrm{j}0$ 处幅度为 H_0。从 $20\lg(H_0)=5\mathrm{dB}$ 需求出发，计算出值 $H_0=1.7783$。为恢复频率比例，在式（4.40）中用 $p=s/1000$ 代换，简化得到 $H(s)$ 如下所示：

$$H(p)\mid_{p=s/1000}=\frac{1.7783}{\left(\frac{s}{1000}\right)^3+2\left(\frac{s}{1000}\right)^2+2\left(\frac{s}{1000}\right)+1}$$

$$=\frac{(1.7783)\times10^9}{s^3+(2\times10^3)s^2+(2\times10^6)s+10^9} \tag{4.41}$$

$$=H(s) \tag{4.42}$$

基于归一化频率比例 Ω 绘制的 $H(p)$ 幅度如图 4.7 所示，标记为“例（2）”。可以发现，在阻带边缘 $\Omega_s=5$ 处的衰减为 42dB，超过指定的 30dB。

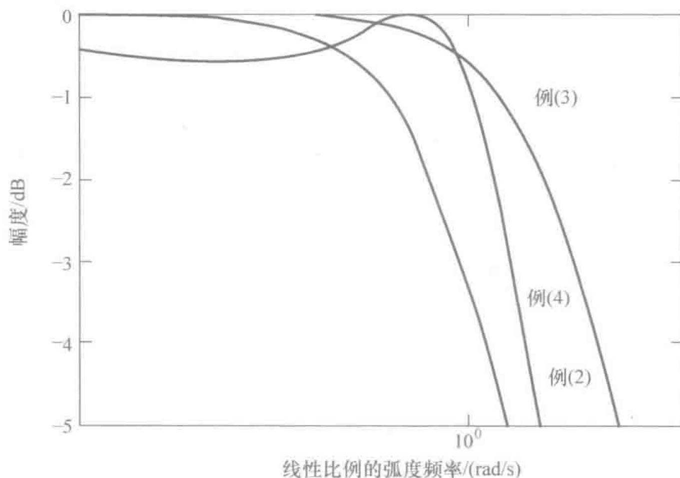


图 4.7 例 4.1 ~例 4.3 原型滤波器的幅度响应

必须记住，在式（4.37）中，$\Omega_p=1$ 是原型滤波器的带宽，在这个频率处，$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 的值为 1/2 或幅值为 −3dB。因此，如果在通频带最大衰减 A_p 不是 3dB，则式（4.31）和式（4.34）不能使用。在这种情况下，修正函数得到式（4.43），这是一般情况：

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\Omega^{2n}} \tag{4.43}$$

现在 $\Omega=1$ 的衰减是 $10\log(1+\varepsilon^2)=A_p$，从中得到 $\varepsilon^2=(10^{0.1A_p}-1)$。我们也会注意到，在上面情况中，当 $A_p=3$ 时，$\varepsilon^2=1$。当 A_p 不是 3dB 时，计算 n 和 p_k 的公式是

$$n \geqslant \frac{\lg[(10^{0.1A_s}-1)/(10^{0.1A_p}-1)]}{2\lg\Omega_s} \tag{4.44}$$

$$p_k=\varepsilon^{-(1/n)}\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{2k+n-1}{2n}\right)\pi\right] \quad k=1,2,3,\ldots,n \tag{4.45}$$

比较式（4.45）和式（4.31），很明显，极点通过 $\varepsilon^{-(1/n)}$ 因子比例化。所以在 $\Omega_p=1$ 处的最大衰减被指定为 A_p；同样在 $\varepsilon^{-(1/n)}$ 频率处衰减是 3dB。

例 4.3

设计一个低通巴特沃斯滤波器，最大幅值为 5dB，通频带 1000rad/s，在通频带内最大衰减 $A_s=0.5$dB，在阻带频率 5000rad/s 最小衰减 $A_p=30$dB。

首先通过 $\omega_p=1000$ 比例化频率，使归一化通带频率 $\Omega_p=1$ 和阻带频率 ω_s 映射到 $\Omega_s=5$。幅度比例化到 5dB。归一化原型滤波器的幅度响应 $H(p)$ 类似于图 4.6a，除了 $A_p=0.5$dB。然后我们计算 $\varepsilon^2=(10^{0.1A_p-1})=0.1220$，因此 $\varepsilon=0.3493$。从式（4.44），得 $n=2.7993$，求整$\lceil n\rceil=3$。接下来从式（4.45）计算三个极点 $p_1=-0.71+\mathrm{j}1.2297$，$p_2=-1.4199$，$p_3=-0.71-\mathrm{j}1.2297$。由这些极点得滤波器的传递函数

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{H_0}{(p+1.4199)(p+0.71-\mathrm{j}1.2297)(p+0.71+\mathrm{j}1.2297)} \\ &= \frac{H_0}{(p+1.4199)(p^2+1.42p+2.0163)} \end{aligned} \tag{4.46}$$

因为在 $\Omega=0$ 处最大值归一化到 0 分贝，我们把 $p=\mathrm{j}0$ 处的 $H(p)$ 幅度等效成 1。因此 $H_0=1.4199\times2.0163=2.8629$。为提高幅值到 5dB，不得不乘以一个常数 $(\sqrt{10^{0.5}})=1.7783$。当然，也可以一步计算相同的 H_0 值，从指标 $20\lg|H(\mathrm{j}0)|=20\lg H(0)-20\lg(1.4199)(2.0163)=5$。将 $p=s/1000$ 代入式（4.46）中恢复频率得到式（4.47），同时滤波器的传递函数满足给定的要求：

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2.8629\times1.7783}{(s/1000+1.4199)[(s/1000)^2+1.42(s/1000)+2.0163]} \\ &= \frac{5.09\times10^9}{(s+1419.9)\ (s^2+1420s+2.0163\times10^6)} \end{aligned} \tag{4.47}$$

在图 4.7 中被标记为“例（3）”。它是式（4.46）的原型滤波器的幅度响应。它在 $\Omega=1$ 处幅值 -0.5dB，在 $\Omega=5$ 处幅值大约 -33dB，超过给定要求。

4.2.3　切比雪夫 I 型近似

对于一个理想低通滤波器，切比雪夫 I 型近似呈现的是，在通带内，幅度的

最大和最小值有相同的值，在截止频率之上，频率增加时，幅度单调减小。通带内幅值等波纹动于最大和最小值之间，如图 4.6b 所示。因此它也被称为极小极大近似和等波纹近似。为从等波纹意义上逼近低通滤波器的理想的幅度响应，原型幅度二次方函数选择为

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{H_0^2}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)} \tag{4.48}$$

其中，$C_n(\Omega)$是切比雪夫 n 阶多项式。它被定义为

$$C_n(\Omega)=\cos(n\arccos\Omega)\quad |\Omega|\leqslant 1 \tag{4.49}$$

多项式 $C_n(\Omega)$在闭区间 $\Omega\in[-1,1]$等波纹意义上接近零值，如图 4.8a 所示的 $n=2$，3，4，5 例。这些多项式是

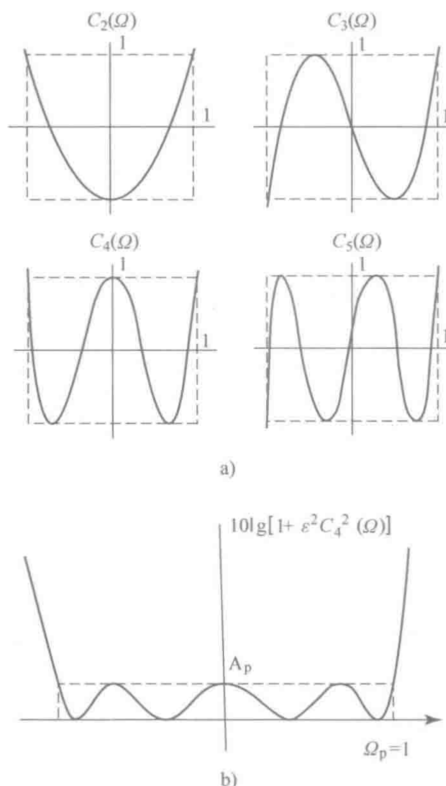


图 4.8　切比雪夫多项式和切比雪夫滤波器

a）切比雪夫多项式幅度　b）切比雪夫 I 型滤波器的衰减

$$C_0(\Omega)=1$$
$$C_1(\Omega)=\Omega$$

$$C_2(\Omega)=2\Omega^2-1$$
$$C_3(\Omega)=4\Omega^3-3\Omega$$
$$C_4(\Omega)=8\Omega^4-8\Omega^2+1$$
$$C_5(\Omega)=16\Omega^5-20\Omega^3+5\Omega \tag{4.50}$$

4.2.4 切比雪夫多项式的性质

切比雪夫多项式的一些性质对下面的讨论是很有用的。令 $\cos\phi=\Omega$。然后 $C_n(n\arccos\Omega)=\cos(n\phi)$，然后使用下等式

$$\begin{aligned}\cos(k+1)&=\cos k\phi\cos\phi-\sin k\phi\sin\phi\\&=2\cos k\phi\cos\phi-\cos[(k-1)\phi]\end{aligned} \tag{4.51}$$

从上获得一个产生任何阶次切比雪夫多项式的递归公式，如

$$C_0(\Omega)=1$$
$$C_{k+1}(\Omega)=2\Omega C_k(\Omega)-C_{k-1}(\Omega) \tag{4.52}$$

为看到 $C_n(\Omega)=\cos(n\arccos\Omega)$ 的确是一个 n 阶多项式，用以下形式考虑：

$$\begin{aligned}\cos(n\phi)&=\mathrm{Re}[e^{jn\phi}]\\&=\mathrm{Re}[\cos\phi+j\sin\phi]^n=\mathrm{Re}[\phi+j\sqrt{(1-\phi^2)}]^n\\&=\mathrm{Re}[\phi+\sqrt{\phi^2-1}]^n\end{aligned} \tag{4.53}$$

通过二项式定理，选择实部扩展 $[\phi+\sqrt{\phi 2-1}]^n$，得到多项式

$$\begin{aligned}\cos(n\phi)=\phi^n&+\frac{n(n-1)}{2!}\phi^{n-2}(\phi^2-1)\\&+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\phi^{n-4}(\phi^2-1)^2+\cdots\end{aligned} \tag{4.54}$$

回想一下，由于 n 是一个正整数，上面扩展表达式有有限项，因此我们认为这是一个多项式（n 阶）。我们还从式（4.50）注意到

$$C_n^2(0)\begin{cases}0 & n\ \text{为奇数}\\1 & n\ \text{为偶数}\end{cases} \tag{4.55}$$

$$C_n^2(1)\begin{cases}1 & n\ \text{为奇数}\\1 & n\ \text{为偶数}\end{cases} \tag{4.56}$$

所以我们得出以下性质：

$$|H(0)|^2=\begin{cases}1 & n\ \text{为奇数}\\ \dfrac{1}{1+\varepsilon^2} & n\ \text{为偶数}\end{cases} \tag{4.57}$$

$$|H(1)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2}\quad n\ \text{为奇数或偶数} \tag{4.58}$$

作为一个例子，$n=4$ 的切比雪夫滤波器衰减特性如图 4.8b 所示。$|H(j\Omega)|$ 的幅

值绘制在图 4.7 的例（4）中，拥有通带等波纹响应，最大值 0dB 和最小值 $[1/(1+\varepsilon^2)]$dB。然而，切比雪夫 I 型低通滤波器的幅值在任何阶数 n 情况下 $\Omega=1$处是 $10\lg[1/(1+\varepsilon^2)]$。可以测量波纹幅值大小为$|H(0)|-|H(1)|$或$|H(0)|^2-|H(1)|^2=1-[1/(1+\varepsilon^2)]=[\varepsilon^2/(1+\varepsilon^2)]\approx\varepsilon^2$。我们可以计算 $\varepsilon^2=(10^{0.1A_p}-1)$。

切比雪夫 I 型滤波器的另一个性质是，在闭区间 [-1 1] 上，最大值和最小值的总数为 $n+1$。切比雪夫低通滤波器幅值二次方见图 4.9a，它显示了刚描述的切比雪夫低通滤波器一些特性。

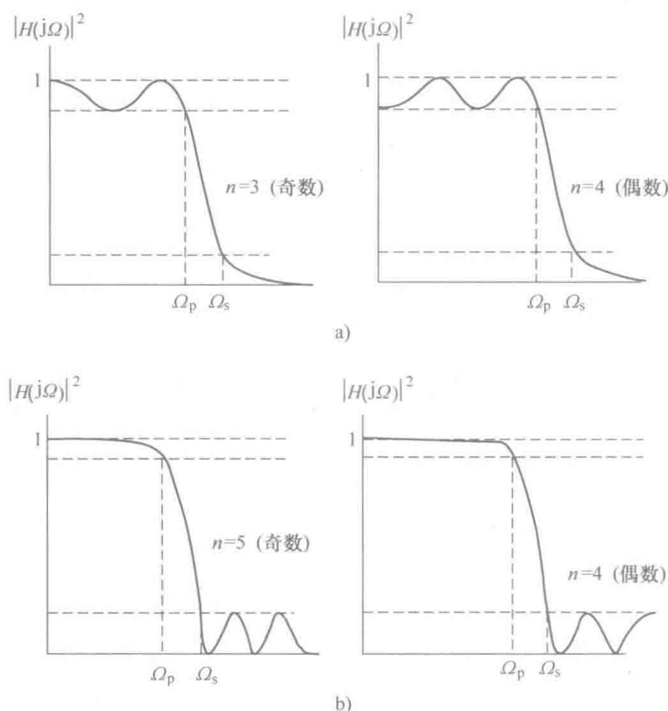


图 4.9　切比雪夫滤波器的幅度响应
a）切比雪夫 I 型滤波器　b）切比雪夫 II 型滤波器

4.2.5　切比雪夫 I 型低通滤波器的设计理论

典型的低通滤波器的指标是指定通带内最大值和最小值；截止频率 ω_p，这是最高的通带频率；阻带频率 ω_s 和在此频率处的幅度。与巴特沃斯滤波器的情况一样，我们归一化幅度和频率，降低给定要求到归一化原型滤波器指标，采用相同的步骤找 $H(p)$的极点。

因为在一般情况下 Ω 可使实际值大于 1，让我们假设 ϕ 是一个复变量：$\phi = \varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2$。从 $1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)=0$，得到 $\varepsilon^2 C_n^2(\Omega) = -1 = \mathrm{j}^2$
我们得到

$$\begin{aligned} C_n(\Omega) &= \pm\frac{\mathrm{j}}{\varepsilon} \\ &= \cos(n\phi) = \cos[n(\varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2)] \\ &= \cos(n\varphi_1)\cosh(n\varphi_2) - \mathrm{j}\sin(n\varphi_1)\sinh(n\varphi_2) \end{aligned} \tag{4.59}$$

方程两端实部与虚部相等，得到

$$\cos(n\varphi_1)\cosh(n\varphi_2) = 0 \tag{4.60}$$

$$\sin(n\varphi_1)\sinh(n\varphi_2) = \mp\frac{1}{\varepsilon} \tag{4.61}$$

从式（4.60）得到

$$\varphi_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \tag{4.62}$$

替换上式到式（4.61），得到 $\sinh(n\varphi_2) = \pm(1/\varepsilon)$，从而得到

$$\varphi_2 = \frac{1}{n}\mathrm{arcsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{4.63}$$

当前，$\Omega = \cos(\varphi) = \cos(\varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cosh(\varphi_2) - \mathrm{j}\sin(\varphi_1)\sinh(\varphi_2)$。因此

$$\mathrm{j}\Omega = \sinh(\varphi_1)\sinh(\varphi_2) + \mathrm{j}\cos(\varphi_1)\cosh(\varphi_2) \tag{4.64}$$

这是 p 相平面满足条件 $1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)=0$ 条件的根。因此 $H(p)H(-p)$ 的 $2n$ 个极点如下

$$p_k = \sinh(\varphi_2)\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \mathrm{j}\cosh(\varphi_2)\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$$

其中 $$k = 1,2,\ldots,(2n) \tag{4.65}$$

由式（4.65）给出的 $H(p)H(-p)$ 的 $2n$ 个极点，可以证明它们位于 p 平面椭圆曲线上，主半轴等于 $\cosh(\varphi_2)$，沿 $\mathrm{j}\Omega$ 轴，和一个副半轴等于 $\sinh(\varphi_2)$，沿着 Σ 轴，其中 $p = \Sigma + \mathrm{j}\Omega$。我们发现原型滤波器在频率 Ω_3 的衰减是 3dB，如下

$$\Omega_3 = \cosh\left[\frac{1}{n}\mathrm{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right] \tag{4.66}$$

p 相平面左半平面极点给出如下

$$\begin{aligned} p_k &= -\sinh(\varphi_2)\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \mathrm{j}\cosh(\varphi_2)\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] \\ &= -\sinh(\varphi_2)\sin(\theta_k) + \mathrm{j}\cosh(\varphi_2)\cos(\theta_k) \quad k = 1,2,3,\ldots,n \end{aligned} \tag{4.67}$$

其中，φ_2 从式（4.63）中获得。在式（4.67）中，注意，θ_k 角度是从 p 相平面虚轴和 p 相平面左半面的极点测量得到的。

寻找阶数 n 的公式是从下式

$$10\lg[1+\epsilon^2 C_n^2(\Omega_s)]\geqslant A_s$$

设计要求得到。结果是

$$n\geqslant\frac{\operatorname{arccosh}\sqrt{[(10^{0.1A_s}-1)/(10^{0.1A_p}-1)]}}{\operatorname{arccosh}\Omega_s}\tag{4.68}$$

$\lceil n\rceil$值选择用于使用式（4.67）计算极点。给定 ω_p、A_p、ω_s 和 A_s 作为切比雪夫低通滤波器 $H(s)$的指标，其在通带最大值被归一化到1，频率被 ω_p 比例化，得到原型滤波器 $\Omega_p=1$ 和 $\Omega_s=\omega_s/\omega_p$，其频率衰减是 A_p 和 A_s。从幅度二次方函数式（4.48）开始找到 $H(s)$的设计和后续过程如下：

1）计算 $\varepsilon=\sqrt{(10^{0.1A_p}-1)}$。

2）从式（4.68）计算 n 和选择 $n=\lceil n\rceil$。

3）从式（4.63）计算 φ_2。

4）从式（4.67）计算极点 p_k（$k=1,2,\cdots,n$）。

5）计算 $H(p)=H_0/[\prod_{k=1}^{n}(p-\hat{p}^k)]=H_0/[\sum_{k=0}^{n}d_k p^k]$。

6）通过等式求 H_0

$$H(0)=\frac{H_0}{d_0}=\begin{cases}1 & n\ \text{为奇数}\\ \sqrt{\dfrac{1}{1+\varepsilon^2}} & n\ \text{为偶数}\end{cases}$$

7）恢复幅度比例

8）用 $p=s/\omega_p$ 代入 $H(p)$恢复频率比例并简化，得到 $H(s)$。

下面以一个简单的例子来说明这个设计过程。

例 4.4

选择一个低通切比雪夫滤波器的指标，最大增益5dB，带宽2500rad/s，和阻带频率12500rad/s；$A_p=0.5\text{dB}$，$A_s=30\text{dB}$。对于原型滤波器，通带的最大值是1（0dB），而且有 $\Omega_p=1$，$\Omega_s=5$。所以

1）$\varepsilon=\sqrt{(10^{0.05}-1)}=0.34931$。

2）$n\geqslant\{\operatorname{arccosh}\sqrt{[(10^3-1)/(10^{0.05}-1)]}\}/[\operatorname{arccosh}(5)]=2.2676$；选择$n=3$。

3）$\varphi_2=\dfrac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\dfrac{1}{0.34931}\right)=0.591378$。

4）$p_k=-0.313228\pm \text{j}1.02192$ 和 -0.626456。

5）$H(p)=H_0/((p+0.31228-\text{j}1.02192)(p+0.31228+\text{j}1.02192)(p+0.626456)]=H_0/[(p^2+0.626456p+1.142447)(p+0.626456)]$。

6）$H(0)=H_0/(1.142447\times0.626456)=1$（因为 $n=3$ 是奇数）。因此 $H_0=0.715693$。

7）直流（DC）增益为 0dB 的传递函数是 $H(p)=0.715693/[(p^2+0.626456p+1.142447)(p+0.626456)]$。$H(p)$乘以 1.7783 恢复频率幅度，因此直流增益提高到 5dB。

8）滤波器的传递函数是

$$H(p)=\frac{0.715693\times 1.7783}{(p^2+0.626456p+1.142447)(p+0.626456)} \tag{4.69}$$

当在 $H(p)$ 中做替代 $p=s/2500$ 和简化表达式后，得到

$$H(s)=\frac{19.886\times 10^{12}}{(s^2+1566s+714\times 10^6)(s+1566)} \tag{4.70}$$

式（4.70）中原型滤波器的幅度响应被标记为“例（4）”，如图 4.7 所示。三个幅度响应绘制在同一图中，以便比较三个滤波器在的频率响应。切比雪夫滤波器在 $\Omega_s=5$ 的衰减是 47dB。为区分下列所述滤波器种类，上述的等波纹通带和阻带内单调的滤波器有时被称为切比雪夫 Ⅰ 型滤波器，下述滤波器称为切比雪夫 Ⅱ 型滤波器。

4.2.6　切比雪夫 Ⅱ 型近似

切比雪夫 Ⅱ 型滤波器器在 $\omega=0$ 处有一个最大限度的平坦，它会随着频率的增加单调降低，在阻带有等波纹响应。切比雪夫 Ⅱ 型滤波器典型的幅度响应如图 4.9b 所示。这类滤波器也称为逆切比雪夫滤波器。切比雪夫 Ⅱ 型滤波器的传递函数通过应用下面两个变换产生：①对原型归一化滤波器给出的高通滤波器幅度二次方函数$|H(1/\mathrm{j}\Omega)|^2$ 进行频率变换 $\Omega=1/\omega$，$|\Omega|>1$ 时拥有等波纹通带，阻带 $0<|\Omega|<1$ 内单调递减；②当其被 1 减时，得到逆切比雪夫低通滤波器幅度二次方函数式（4.72）如下所示：

$$\left|H\left(\frac{1}{\mathrm{j}\Omega}\right)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_n^2(1/\Omega)} \tag{4.71}$$

$$1-\frac{1}{1+\varepsilon^2C_n^2(1/\Omega)}=\frac{\varepsilon^2C_n^2(1/\Omega)}{1+\varepsilon^2C_n^2(1/\Omega)}=\frac{1}{\left[1+\dfrac{1}{\varepsilon^2C_n^2(1/\Omega)}\right]} \tag{4.72}$$

低通切比雪夫滤波器 Ⅰ 型幅值二次方函数$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$，$\left|H\left(\frac{1}{\mathrm{j}\Omega}\right)\right|^2$ 和 $1-\left|H\left(\frac{1}{\mathrm{j}\Omega}\right)\right|^2$ 如图 4.10 所示。

在图 4.10 中进行两个重要观察。归一化截止频率 $\Omega=1$ 成为逆切比雪夫滤波器阻带的最低频率，其幅值大小是$[\varepsilon^2/(1+\varepsilon^2)]$。因此逆切比雪夫滤波器指定频率 ω_p 和 ω_s 必须由 ω_s 比例恢复，而不是由 ω_p 得到原型逆切比雪夫滤波器。

我们也观察到，当 n 是奇数时，在阻带的有限零点数量是$(n-1)/2=m$。

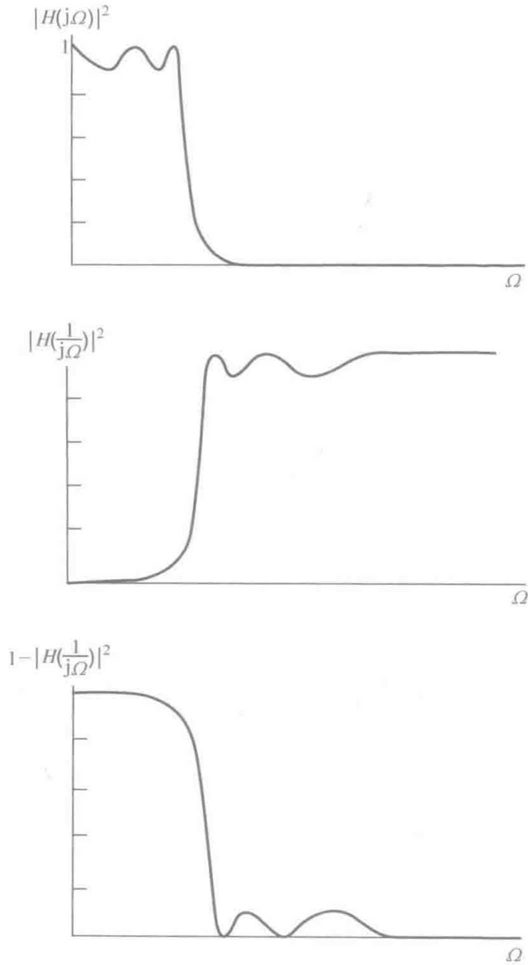


图 4.10　切比雪夫Ⅱ型滤波器的响应变换

当 n 是一个奇整数时，项 $\sec\theta_k$ 与下面设计过程有关，当 $k=(n+1)/2$ 时达到∞值。所以一个零点转移到 j∞；虚轴上保留有限数量复共轭对零点。这样切比雪夫Ⅱ型滤波器分子表达如 4.2.7 节步骤 6）所示。注意，步骤 1）计算的 ε_i 值不同于切比雪夫Ⅰ型滤波器设计中计算的值。在步骤 3）和步骤 4）中使用的 φ_i 值不同于切比雪夫Ⅰ型滤波器设计中使用的 φ_2 值。因此它会误导解释切比雪夫Ⅱ型滤波器极点是由“切比雪夫Ⅰ型滤波器的互逆极点”得到的。

4.2.7　切比雪夫Ⅱ型低通滤波器的设计

给定 ω_p、A_p、ω_s 和通频带的最大值，我们用 ω_s 比例化 ω_p 和 ω_s，导出归一

化原型逆切比雪夫低通滤波器的指标。方程（4.72）是此逆切比雪夫滤波器的幅值二次方函数，遵循的设计过程概括如下：

1）计算 $\varepsilon_i = \sqrt{(10^{0.1A_s} - 1)}$。

2）计算

$$n \geqslant \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{[(10^{0.1A_s} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)]}}{\operatorname{arccosh} \Omega_s}$$

并选择 $n = \lceil n \rceil$。

3）从 $\varphi_i = (1/n)\operatorname{arcsinh}(1/\varepsilon_i)$. 计算 φ_i

4）计算左半平面的极点 p_k：

$$p_k = \frac{1}{-\sinh(\varphi_i)\sin(\theta_k) + \mathrm{j}\cosh(\varphi_i)\cos(\theta_k)} \quad k = 1,2,3,\ldots,n$$

5）传递函数 $H(p)$ 的零点计算为 $z_k = \pm \mathrm{j}\Omega_{0k}\varphi = \mathrm{j}\sec\theta_k \; k = 1,2,\cdots,m = \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $H(p)$ 的分子式 $N(p)$ 为 $\prod_{(k=1)}^{m}(p + \Omega_{0k}^2)$

6）计算

$$H(p) = \frac{H_0 \prod_{k=1}^{m}(p + \Omega_{0k}^2)}{\prod_{k=1}^{n}(p - p_k)}$$

并计算 $H_0 = \prod_{k=1}^{n}(p_k) / \prod_{k=1}^{m}(\Omega_{0k})^2$。

7）恢复幅值比例。

8）将 $p = s/\omega_s$ 代入 $H(p)$ 恢复频率比例得到逆切比雪夫滤波器的 $H(s)$。

例 4.5

设计逆切比雪夫低通滤波器，通带最大增益 0dB，$\omega_p = 1000$，$A_p = 0.5\text{dB}$，$\omega_s = 2000$，$A_s = 40\text{dB}$。用 ω_s 归一化频率获得最低的阻带频率 $\Omega = 1$，$\omega_p = 1000$ 映射到 $\Omega_p = 0.5$。当通过上面给出的步骤得到切比雪夫滤波器传递函数 $H(p)$ 后，将做替代 $p = s/2000$，进行频率归一化逆过程。设计过程如下给出

1）$\varepsilon_i = (\sqrt{10^4 - 1})^{-1} = 1/99.995$。

2）$n = 5$。

3）$\varphi_i = \dfrac{1}{5}\operatorname{arcsinh}(99.995) = 1.05965847$。

4）左半平面极点 $p_k = (-0.155955926 \pm \mathrm{j}0.6108703175)$、$(-0.524799485 \pm \mathrm{j}0.485389011)$ 和 (-0.7877702666)。

5）零点是 $z_1 = \pm \mathrm{j}1.0515$ 和 $z_2 = \pm \mathrm{j}1.7013$。

6）逆切比雪夫滤波器 $H(p)$ 的传递函数是

$$\frac{H_0(p^2+1.0515^2)(p^2+1.7013^2)}{(p^2+0.3118311852p+0.3974722176)(p^2+1.04959897p+0.5110169847)(p+0.787702666)} \tag{4.73}$$

7）计算 $H_0=0.049995$。

8）因此简化 $H(p)$ 到最终形式

$$\frac{0.049995(p^4+4.04p^2+3.2002)}{p^5+2.1491328p^4+2.30818905p^3+1.54997p^2+0.65725515p+0.15999426)} \tag{4.74}$$

式（4.73）的幅度响应绘制在图 4.11 中。可以看到，原型滤波器满足所需指标。现在只需要用频率 2000 解归一化，使要求滤波器通频带的变化从 0.5 ~ 1000rad/s，并满足例 4.5 给定的指标要求。

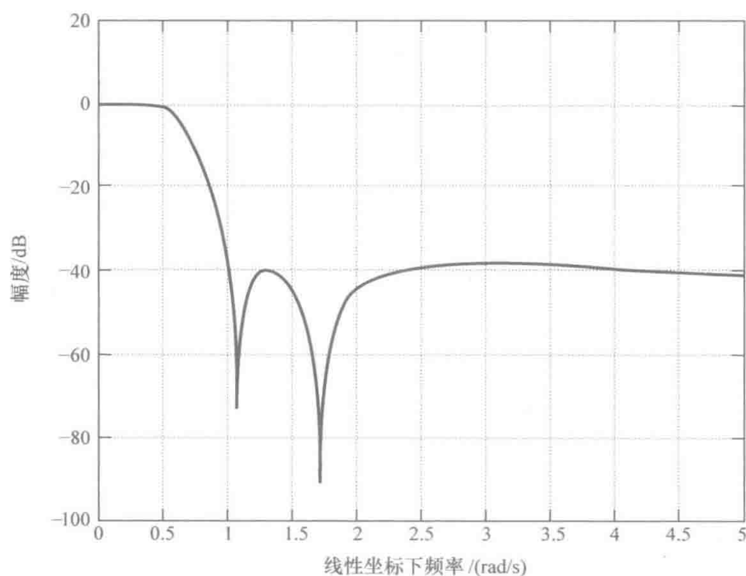


图 4.11 切比雪夫Ⅱ型低通滤波器幅度响应

4.2.8 椭圆函数近似

另一种类型滤波器被称为椭圆函数滤波器或 Cauer 滤波器。它在通带和阻带都呈现一种等波纹响应。椭圆滤波器要求达到给定指标所需的阶数低于切比雪夫滤波器阶数，而切比雪夫滤波器的阶数又比巴特沃斯滤波器低。因此椭圆滤波器形成一个重要的滤波器种类，但其理论和设计过程都是复杂的，超出了本书的范围。然而，在例 4.11 中，我们将描述如何使用 MATLAB 函数来设计这些过滤器。

4.3　模拟频率转换

一旦知道逼近理想低通原型滤波器响应的方法，逼近高通、带通和带阻滤波器理想幅度响应的滤波器设计就容易进行。这通过使用著名的模拟频率转换 $p = g(s)$ 映射低通滤波器 $H(\mathrm{j}\Omega)$ 的幅度响应到要求的高通、带通或带阻滤波器 $H(\mathrm{j}\omega)$。变换参数由高通、带通及带阻滤波器的截止频率和阻带频率决定，使它们的通带频率映射到归一化原型滤波器的通带，高通、带通及带阻滤波器的阻带频率映射到原型滤波器的阻带频率。按照前面描述的设计方法设计归一化原型低通滤波器 $H(p)$ 后，频率变换 $p = g(s)$ 应用到 $H(p)$ 计算要求滤波器的传递函数 $H(s)$。在此通用概述下，让我们考虑每个滤波器一些更详细的设计。

4.3.1　高通滤波器

通过一个例子可以很容易地描述高通滤波器的设计。假设指定一个等波纹通带高通滤波器 $\omega_p \leqslant |\omega| < \infty$，还有一个阻带频率 ω_s。给定通频带截止频率 ω_p 的幅度，与 ω_s 处幅度（或 A_p 和 A_s）。从低通－高通（LP －HP）频率转换使用如下 $p = g(s)$来设计高通滤波(HP)器

$$p = \frac{\omega_p}{s} \tag{4.75}$$

可以看到，当 $s = \mathrm{j}\omega_p$，$p = -\mathrm{j}$ 和当 $s = -\mathrm{j}\omega_p$，$p = \mathrm{j}$ 的值。也可以表明经这种转换，所有高通滤波器通带频率映射到低通原型滤波器通带频率 $-1 \leqslant \Omega \leqslant 1$ 的。通过将 $s = \mathrm{j}\omega_s$ 代入式（4.75)，我们计算要求阻带频率 ω_s 的映射 Ω_s。求阻带频率 $\Omega_s = \omega_p/\omega_s$。所以高通滤波器要求的幅度响应转换成低通原型滤波器的部分。我们设计原型低通滤波器以满足这些性能指标，然后在 $H(p)$ 做 $p = \omega_p/s$ 替代获得要求高通滤波器的传递函数 $H(s)$。

例 4.6

切比雪夫高通滤波器的截止频率是 $\omega_p = 2500$，这是通带的最低频率，通频带的最大衰减 $A_p = 0.5\mathrm{dB}$。通频带的最大增益是 5dB。阻带频率 $\omega_s = 500$ 处，所需的最小衰减为 30dB。设计高通滤波器 $H(s)$。

当应用 LP－HP 转换 $p = 2500/s$ 时，截止频率 $\omega_p = 2500$ 映射到 $\Omega_p = 1$ 和阻带频率 ω_s 映射到 $\Omega_s = 5$。在低通原型滤波器中，有 $\Omega_p = 1$，$\Omega_s = 5$，$A_p = 0.5\mathrm{dB}$，$A_s = 30\mathrm{dB}$，通频带的最大值是 5dB。这个滤波器在例 4.3 中已给出，传递函数为式（4.70)，重述如下：

$$H(p)=\frac{0.715693\times1.7783}{(p^2+0.626456p+1.142447)(p+0.626456)}$$

接下来在此传递函数做 $p=2500/s$ 替代，简化后，要求的高通切比雪夫滤波器传递函数变成

$$\begin{aligned}H(s)&=\left.\frac{0.715693\times1.7783}{(p^2+0.626456p+1.142447)(p+0.626456)}\right|_{p=2500/s}\\&=\frac{1.7783s^3}{(s^2+1370.9s+5.4707\times10^6)(s+3990)}\end{aligned}\tag{4.76}$$

式（4.76）的幅度响应绘制在图4.12中，发现超过给定高通的过滤器的要求。在通带和阻带内达到通带最大平坦或等波纹响应高通滤波器的设计方法类似。

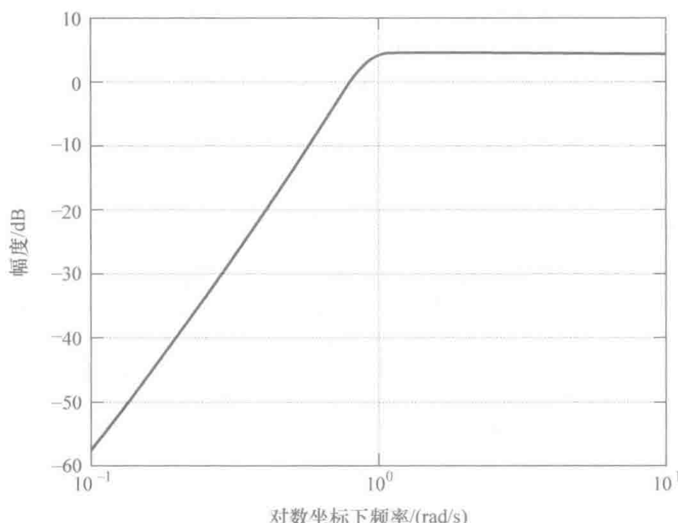


图4.12 一个高通滤波器的幅度响应

4.3.2 带通滤波器

带通滤波器 $H(s)$ 的归一化要求如图4.13所示，依次是截止频率 ω_1 和 ω_2，截止频率间通带内的最大值，通带内的最大衰减或在截止频率 ω_1 和 ω_2 的最小幅值和阻带内的一个频率 $\omega_s=$（ω_3 或 ω_4），在其处指定最小衰减或最大幅值。所需的通带响应可以是巴特沃斯或切比雪夫响应。

低通－带通（LP －BP）频率转换 $p=g(s)$，用于指定的带通滤波器设计

$$p=\frac{1}{B}\left(\frac{s^2+\omega_0^2}{s}\right)\tag{4.77}$$

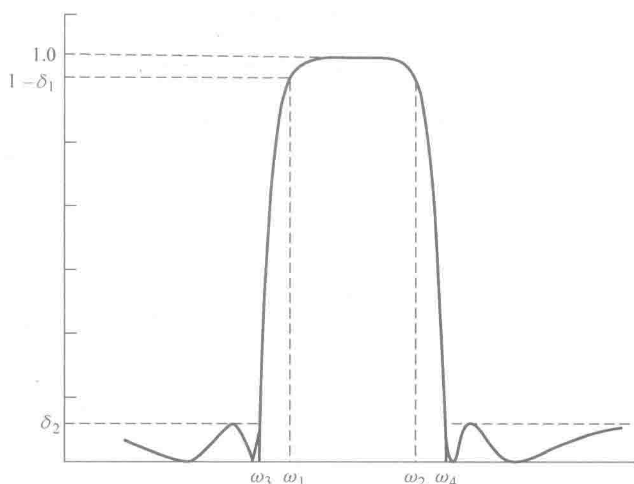


图 4.13　带通滤波器的典型指标

其中 $B=\omega_2-\omega_1$ 是滤波器的带宽，$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$ 是带通滤波器的几何平均频率。

带通滤波器频率 $s=\mathrm{j}\omega_k$ 频率在此变换下被映射到一个频率 $p=\mathrm{j}\Omega_k$，如下获得

$$\mathrm{j}\omega_k=\frac{\mathrm{j}}{B}\left(\frac{\omega_0^2-\omega_k^2}{\omega_k}\right) \tag{4.78}$$

$$=\frac{\mathrm{j}\omega_0}{B}\left(\frac{\omega_k}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_k}\right) \tag{4.79}$$

因此频率 ω_1 和 ω_2 映射成 $\Omega=\mp 1$，和频率 $-\omega_1$ 和 $-\omega_2$ 映射到 $\Omega=\pm 1$。同样，阻带频率的正值与 ω_s 映射从以下计算得到

$$\Omega_s=\left|\frac{1}{B}\left(\frac{\omega_0^2-\omega_s^2}{\omega_s}\right)\right| \tag{4.80}$$

在频率 $\Omega=1$ 处的幅度或衰减和原型滤波器 Ω_s 与带通滤波器对应频率的值一样。从低通原型滤波器的指标，仿照前面讨论的设计过程，获得其传递函数 $H(p)$。然后替代式（4.77）在 $H(p)$ 得到指定带通滤波器的传递函数 $H(s)$。

例 4.7

切比雪夫 I 型带通滤波器的指标 $\omega_1=10^4$，$\omega_2=10^5$，$\omega_s=2\times10^5$，$A_p=0.8\text{dB}$，$A_s=30\text{dB}$，和通频带的最大幅值 10dB。使用以下过程来设计滤波器：

1）$B=\omega_2-\omega_1=9\times10^4$ 和 $\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}=\sqrt{10^9}=31.62\times10^3$。

2）LP－BP 变换是 $p=1/9\times10^4[(S^2+10^9)/s]$。

3）让 $s=\mathrm{j}\omega_s=\mathrm{j}2\times10^5$。从之前的变换，得到 $\Omega_s=2.1667$。

4）低通切比雪夫原型滤波器幅度响应如图 4.6b 所示。

5）计算 $\varepsilon=\sqrt{10^{0.1A_p}-1}=\sqrt{10^{0.08}-1}=0.4497$。

6）从式（4.68）计算 n。选择 $n=\lceil 3.5\rceil=4$。

7）从式（4.63）计算 φ_2。得到 $\varphi_2=0.3848$。

8）从式（4.67）计算极点：$p_k=-0.15093\pm\mathrm{j}0.9931$ 及 $-0.36438\pm\mathrm{j}0.41137$。

9）低通原型切比雪夫滤波器的传递函数从 $H(p)=H_0/[\prod_{k=1}^{4}(p-p_k)]$ 得到，在 $\Omega=0$ 处 H_0 固定匹配 10dB 增益：

$$H(p)=\frac{0.8788}{(p^2+0.3018p+1.009)(p^2+0.7287p+0.302)} \tag{4.81}$$

10）现在在 $H(p)$ 中替代 $p=(S^2+10^9)/(9\times10^4\mathrm{s})$ 和简化 $H(s)$ 得到

$$H(s)=\frac{5.7658\times10^{19}s^4}{D(s)}$$

其中

$$D(s)=\begin{bmatrix}(s^4+2.7162\times10^4s^3+101.729\times10^8s^2+2.7162\times10^{13}s+10^{18})\\ \times(s^4+6.5583\times10^4s^3+44.462\times10^8s^2+6.5583\times10^{13}s+10^{18})\end{bmatrix} \tag{4.82}$$

为验证设计，我们绘制了带通滤波器的幅度响应，如图 4.14 所示。

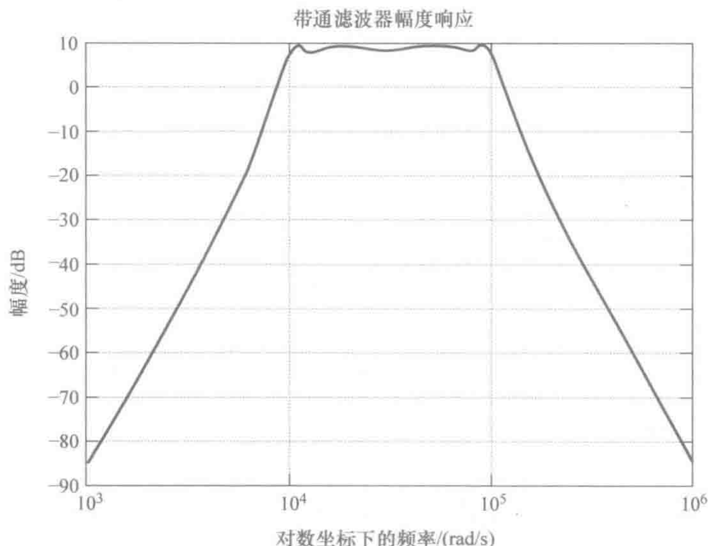


图 4.14　例 4.7 带通滤波器幅度响应

4.3.3　带阻滤波器

一个归一化带阻滤波器的指标如图4.15所示。这种滤波器的通带是由$0\leqslant\omega\leqslant\omega_1$和$\omega_2\leqslant\omega\leqslant\infty$给出，而频率$\omega_3$和$\omega_4$之间定义为阻带。通常这些频率和相应的幅度即指标。注意，在图4.13中，显示一个带通滤波器的幅度响应，阻带是等波纹，ω_1与ω_2之间的通频带是单调响应；这是一个切比雪夫Ⅱ型滤波器。但带阻滤波器响应如图4.15所示，通频带等波纹和阻带最大限度平坦，因此它是Ⅰ型切比雪夫滤波器。重要的是要记住，LP－BS转换的参数B选为$\omega_2-\omega_1$，而不是阻带的带宽$\omega_4-\omega_3$！平均频率$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$，LP －BS频率转换$p=g(s)$如下

$$p=B\left(\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right) \tag{4.83}$$

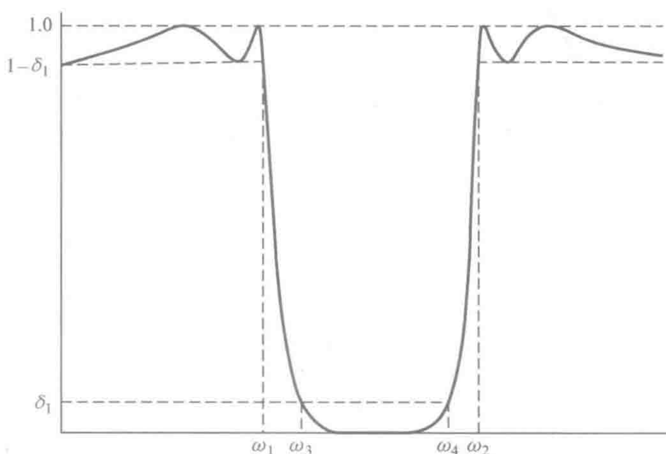


图4.15　带阻滤波器的典型指标

这种转变将整个带阻滤波器的通带变换到原型低通滤波器通带$|\Omega|\leqslant1$。所以必须找到频率Ω_s对应转换下的阻带频率ω_s。它们的数学关系如下：

$$\Omega_s=\left|\frac{B\omega_s}{\omega_s^2-\omega_0^2}\right| \tag{4.84}$$

相较于对应原型低通滤波器我们简化了带阻滤波器指标。其设计在前面已讨论。当原型滤波器的传递函数$H(p)$设计完成，转换关系$p=B[s/(s^2+\omega_0^2)]$用于将$H(p)$转换为$H(s)$。带阻滤波器的设计如下面的示例所示。

例4.8

假设给出的带阻滤波器指标如图4.15所示。在这个例子中，给出$\omega_1=$

1500，$\omega_2=2000$，$\omega_s=\omega_4=1800$，$A_p=0.2\text{dB}$，$A_s=55\text{dB}$。所需的通频带要求最大平坦响应。有这些指标后，设计带阻滤波器过程如下所示：

1）$B=2000-1500=500$ 和 $\omega_0=\sqrt{2000\times1500}=1732.1$。

2）LP－BS 频率转换 $p=500\ [s/(s^2+3\times10^6)]$。

3）令 $s=\mathrm{j}\omega_s=\mathrm{j}1800$。然后得到 $\Omega_s=3.74$。

4）按照例 4.2 使用的设计过程，得到 $\varepsilon=\sqrt{10^{0.02}-1}=0.21709$，从式(4.44)，得到 $n=5.946$，选择 $n=6$。

5）6 个极点从式（4.45）计算，$p_k=-0.33385\pm\mathrm{j}1.2459$，$-0.9121\pm\mathrm{j}0.9121$ 和 $-1.246\pm\mathrm{j}0.3329$。

6）低通原型滤波器的传递函数 $H(p)$ 是由 $H(p)=H_0/[\prod_{k=1}^{4}(p-p_k)]$ 构成，如下

$$\frac{(1.664)^3}{(p^2+0.6677p+1.664)(p^2+1.824p+1.664)(p^2+2.492p+1.664)} \tag{4.85}$$

7）接下来要在 $H(p)$ 中做 $p=500[(s/(s^2+3\times10^6)]$ 替代和简化表达式，得到要求带阻滤波器的传递函数 $H(s)$。这就完成了带阻滤波器的设计。其幅度响应超过给定要求。

本部分简要总结了模拟滤波器分段恒定幅度的近似理论。这个理论将用作数字滤波器幅度的近似，这将在下面章节介绍。被应用到低通原型产生其他类型滤波器的模拟频率转换 $p=g(s)$ 在表 4.2 列出。

表 4.2　设计 HP、BP 和 BS 滤波器的频率转换

转换形式	转换 $p=g(s)$	常用参数
LP－LP	$p=s/\omega_p$	ω_p＝指定低通滤波器的带宽
LP－HP	$p=\omega_p/s$	ω_p＝指定高通滤波器的截止频率
LP－BP	$p=(1/B)[(s^2+\omega_0^2)/s]$	$B=\omega_2-\omega_1$，B 是指定带通滤波器的带宽，$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$
LP－BS	$p=B[s/(s^2+\omega_0^2)]$	$B=\omega_2-\omega_1$

4.4　数字滤波器

相对于模拟滤波器，数字滤波器传递函数描述有两种类型：有限冲激响应滤波器传递函数和无限冲激响应滤波器传递函数。设计 FIR 滤波器的方法将在下一章处理。既然我们已经回顾了近似模拟滤波器幅度的方法，那就有必要理解模拟和数字滤波器的频域描述之间的关系，以理解所使用的频率转换来转换模拟滤波器的频域指标到数字滤波器的对应指标。

4.5　冲激不变变换

设计 IIR 滤波器流程采用不同形式的转换，令 $s=f(z)$，将 $H(s)$ 转换为 $H(z)$。当它从模拟滤波器传递函数 $H(s)$ 获得时，转换 $s=f(z)$ 必须满足使数字滤波器传递函数 $H(z)$ 是稳定的要求。通过上述方法获得的模拟滤波器的传递函数是稳定函数；就是说，它们的极点在 s 平面的左边半面。当 $H(s)$ 和 $f(z)$ 在 s 域和 z 域分别稳定时，$H(s)$ 的左半平面极点映射到 z 平面单位圆内的极点，因此 $H(z)$ 也是一个稳定的传递函数。我们也想要将频率从 $j\omega$ 轴上的 $-\infty$ 到 ∞ 映射单位圆圆周上的频率，而不遇到任何不连续。

在第 2 章，当我们得到从模拟信号 $x(t)$ 产生的离散时间信号 $x(nT)$ 的 z 变换时，我们已经介绍了 $z=e^{sT}$ 变换。

我们绘制模拟滤波器的幅度响应，它是 ω 的函数。基于冲激不变转换，$s=j\omega$ 映射到 $z=e^{j\omega T}$。虽然数字滤波器 $H(e^{j\omega T})$ 的幅度是变量 $e^{j\omega T}$ 的一个函数，但我们也不能以 $e^{j\omega T}$ 函数绘图。我们可以绘制数字滤波器的幅度响应，它只作为 ωT 的函数。(再一次指出，归一化数字频率 ωT 在 DSP 文献中通常用 ω 表示。) 当 $s=j\omega$ 值从 $-j\infty$ 沿虚轴到 $+j\infty$ 增加时，变量 $e^{j\omega T}$ 逆时针方向在 z 平面从 $e^{-j\pi}$ 到 $e^{j\pi}$（通过 $z=1$）沿单位圆边界增加和从 $e^{j\omega T}=e^{j(\omega T+2r\pi)}$ 不断重复，其中 r 是一个整数。在 s 平面左半面 $j\omega$ 轴界定在 $\pm j[(2r-1)\pi/T]$ 和 $\pm j[(2r+1)\pi/T)$ 之间的条形图被映射到 z 平面的单位圆为界的面上，如图 4.16 所示。因此，如果模拟信号 $x(t)$ 带限，频率响应 $X^*(j\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-j\omega T}$ 呈周期性而避免混淆。

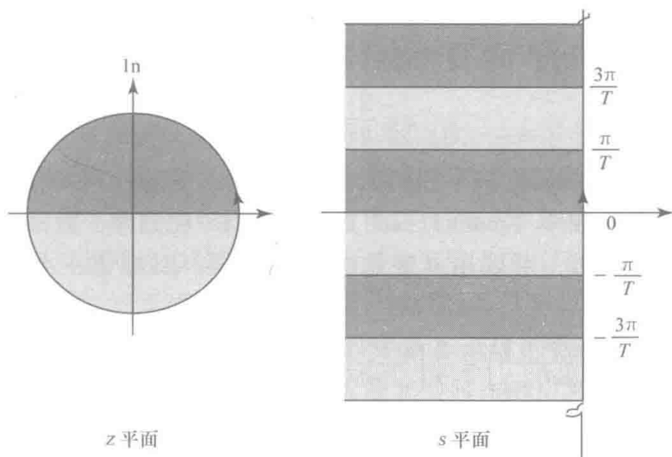


图 4.16　$z=e^{sT}$ 变换时，s 平面到 z 平面的映射

考虑到模拟滤波器的传递函数 $H(s)$。因为模拟滤波器的极点，如在本章讨论的滤波器，很简单，它的部分分解形式是

$$H(s) = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k}{s + s_k} \tag{4.86}$$

典型式 $R_k/(s + s_k)$ 的单位冲激响应 $h_k(t)$ 是 $R_k e^{-s_k T}$。当用采样周期 T 采样后，z 变换的估计值变为

$$R_k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s_k nT z^{-n}} = R_k \frac{1}{1 - e^{-s_k T} z^{-1}} = R_k \frac{z}{z - e^{-s_k T}} \tag{4.87}$$

因此 $z = e^{sT}$ 变换下从 $H(s)$ 得到 $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} \frac{R_k z}{z - e^{-s_k T}} \tag{4.88}$$

因为数字滤波器的单位冲激响应 $h(nT)$ 匹配在 $t = nT$ 抽样时的 $h(t)$，变换 $z = e^{sT}$ 称为冲激不变变换。但 $H(z)$ 的频率响应不匹配 $H(s)$ 的频率响应，除非 $h(t)$ 带限。如果模拟滤波器的幅度响应 $H(\omega)$ 对大于 ω_b 一些频率的值很小，而 $h(t)$ 用大于 $2\omega_b$ 频率采样，则从冲激不变变换得到数字滤波器 $H(z)$ 或许会产生少量的偏差，这在实际设计应用中或许是不可以接受的。但是这种方案并不适用于高通、带通和全通滤波器的设计，因为它们的频率响应不带限。如果冲激不变变换应用到最小相位模拟滤波器 $H(s)$，由此产生的数字滤波器可能是，也可能不是一个最小相位滤波器。基于这些原因，冲激不变变换在实际应用中已不常使用。

4.6 双线性变换

双线性变换最常用于 IIR 滤波器的设计。它被定义为

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \tag{4.89}$$

为发现 z 平面单位圆上频率如何映射到 s 平面，在式（4.89）中做替代 $z = e^{j\omega T}$。注意，ω 是角频率（rad/s），ωT 是 z 平面归一化频率。数字滤波器的归一化频率不使用 ω 符号，可以用 θ 表示归一化频率，以避免在本节中产生任何混淆：

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\left(\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right) = \frac{2}{T}\left[\frac{e^{j(\omega T/2)} - e^{-j(\omega T/2)}}{e^{j(\omega T/2)} + e^{-j(\omega T/2)}}\right] = j\,\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= j2f_s \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) = j\lambda \end{aligned}$$

这一转换映射 z 平面单位圆内的极点到 s 平面左半部分，反之亦然。它还映射 z 平面单位圆上的频率到 s 平面的整个虚轴频率，其中 $s = \sigma + j\lambda$。这转换满足

我们所需映射的两个条件，前节提到的 $s=f(z)$ 或其逆关系 $z=b(s)$。此映射如图 4.17 所示，可以与图 4.16 所示的映射比较。

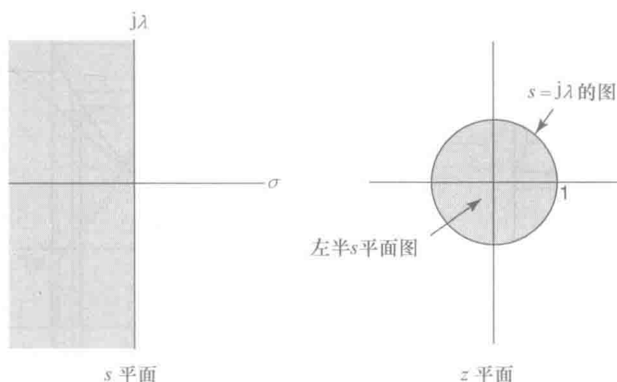


图 4.17　s 平面映射到 z 平面的双线性变换

为更详细地理解映射，考虑一个 IIR 滤波器在 $[0,(\omega_s/2)]$ 区间的频率响应，其中 $\omega_s/2=\pi/T$ 是奈奎斯特频率。作为一个例子，我们选择一个频率响应 $|H(e^{\omega T})|=|H(e^{j\theta})|$ 的巴特沃斯带通数字滤波器，如图 4.18a 所示。

在图 4.18 中，还用曲线描绘展示了 ωT 和 $\lambda=2f_s\tan(\omega T/2)$ 之间的关系。对应于任何 $\omega T=\theta$ 的 λ 值，可以从 $\lambda=2f_s\tan(\theta/2)$ 计算出，通过如图 4.18 所示的几个频率如 $\omega_1 T$，$\omega_2 T$ 映射来阐述。数字滤波器在任何归一化频率 $\omega_k T$ 处频率响应的大小就是 $H(s)$ 在 $s=j\lambda_k$ 处的大小，其中 $\lambda_k=2f_s\tan(\omega_k T/2)$。

图 4.17 显示了数字滤波器在奈奎斯特间隔 $(0,\pi)$ 的幅度响应映射到 λ 的 $(0,\infty)$ 区间。所以，有一个非线性映射，当映射到 λ 域时，ω 的频率域被扭曲。

同样，$(0,-\pi)$ 区间的频率映射到 λ 的 $(0,-\infty)$ 整个区间。从tan（.）函数的周期性质，我们也看到，数字滤波器的频率响应在 ω 域周期性重复映射到在 λ 域相同的频率响应和双线性变换下获得传递函数 $H(s)$ 类似于模拟滤波器。但要指出，我们只使用模拟滤波器近似的数学理论解决寻找函数 $H(s)$ 问题，而我们没有设计一个模拟滤波器。换句话说，双线性变换可以帮助我们减少数字滤波器的频率响应函数变量 ω 到另一个函数变量 λ 逼近的数学问题。因为它与模拟频率的相似性，近似问题通过使用模拟滤波器频率响应近似的数学理论解决。因此，如果频率响应 $|H(j\lambda)|$ 是一个低通滤波器频率响应，频率 s 由 λ_c 线性比例化获得一个低通原型滤波器 $|H(j\Omega)|$ 的传递函数。如果它是一个高通、带通或带阻响应，则使用表 4.2 中列出的适当的模拟频率转换 $\boldsymbol{p}=g(s)$ 转换要求的 $|H(j\lambda)|$ 到模拟低通原型滤波器对应部分。我们获得原型滤波器的传递函数

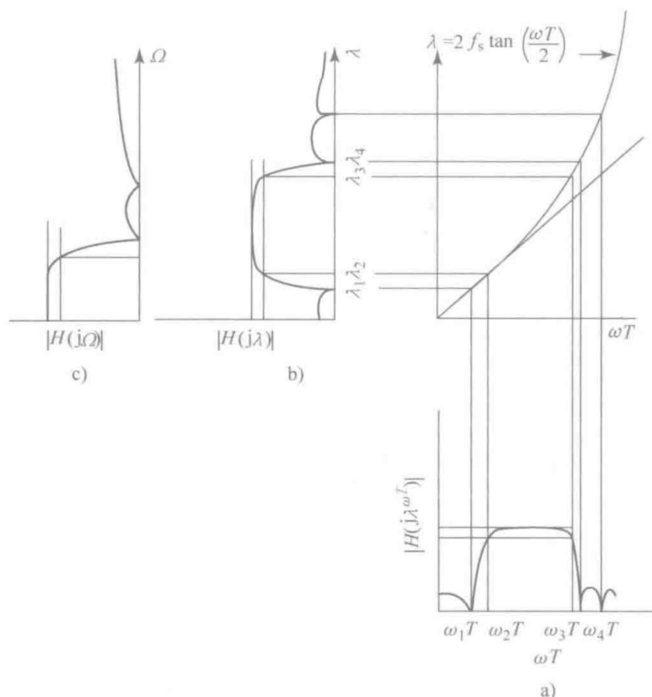


图 4.18 双线性变换和模拟 BP⇒LP 变换时数字滤波器响应的映射

$H(\boldsymbol{p})$，其复频率变量 $\boldsymbol{p}$ 是粗体显示为了与 $H(p)$ 区分，其幅值用 $|H(j\Omega)|$ 表示。模拟滤波器近似理论用于寻找 $H(\boldsymbol{p})$，以使其幅值 $|H(j\Omega)|$ 接近低通原型滤波器的幅值响应。重要的是要注意，滤波器的单位冲激响应 $H(\boldsymbol{p})$ 用周期 T 采样后并不与数字滤波器 $H(z)$ 的单位脉冲响应匹配，因为双线性变换不是冲激不变。

一旦设计了低通滤波器原型函数 $H(\boldsymbol{p})$，应用适当的模拟频率转换 $\boldsymbol{p}=g(s)$ 到 $H(\boldsymbol{p})$ 得到函数 $H(s)$。然后在 $H(s)$ 中替换 $s=2f_s[(z-1)/(z+1)]$ 得到 $H(z)$ 作为数字滤波器的传递函数。

例 4.9

最大平坦带通滤波器要求的幅度响应通带最大值为 1.0，位于截止频率 $\theta_1=0.4\pi$ 和 $\theta_2=0.5\pi$ 之间。在这些截止频率处要求的幅度不低于 0.93，在阻带频率 $\theta_3=0.7\pi$ 处要求幅值不超过 0.004。使用双线性变换，设计接近这些指标的 IIR 数字滤波器。

很明显，这些指标的频率被归一化。所以 $\theta_1=0.4\pi$ 和 $\theta_2=0.5\pi$ 是归一化截止频率，$\theta_3=0.7\pi$ 是阻带频率。要求的幅值响应如图 4.19 所示。这两个截止频率 ω_1，ω_2 和阻带频率 ω_3 映射成 $\boldsymbol{\lambda}_1$、$\boldsymbol{\lambda}_2$、$\boldsymbol{\lambda}_3$。在这个例子中，我们在相平面选择 f_s 比例化频率，这样，$\boldsymbol{\lambda}_1$、$\boldsymbol{\lambda}_2$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_3$ 是通过下面的双线性变换 $s=2[(z-1)/$

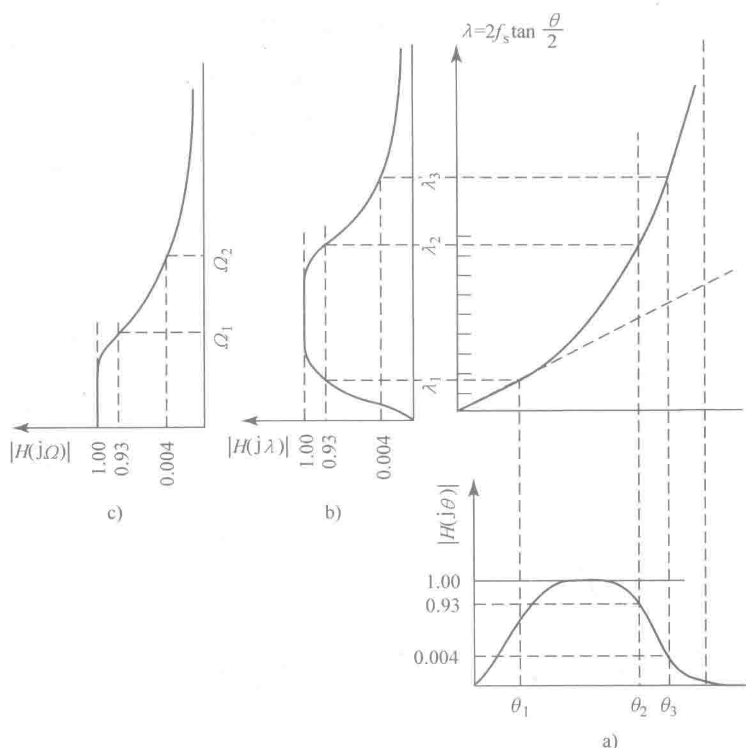


图 4.19　双线性变换下的滤波器响应映射

$(z+1)$]得到

$\lambda_1 = 2\tan(0.2\pi) = 1.453\text{rad/s}$

$\lambda_2 = 2\tan(0.25\pi) = 2.00\text{rad/s}$

$\lambda_3 = 2\tan(0.35\pi) = 3.95\text{rad/s}$

"模拟"滤波器 $H(s)$ 的频率响应绘制在图 4.19b。

现在求对于预畸变带通滤波器 $|H(\mathrm{j}\lambda)|$ 带宽（BW）$= \lambda_2 - \lambda_1 = 0.547$ 和中心频率 $\lambda_0 = \sqrt{\lambda_2\lambda_1} = 1.705$。接下来，定义低通 - 带通频率转换

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{(B)}\left(\frac{s^2+\lambda_0^2}{s}\right) = \frac{1}{0.547}\left(\frac{s^2+1.705^2}{s}\right)$$

为找到频率 Ω_3，对应频率 $\lambda_3 = 3.95$，在前面函数中做替换 $s = \mathrm{j}3.95$，得到 $p = \mathrm{j}5.876 = \mathrm{j}\Omega_2$，而截止频率映射到归一化频率 $\Omega_\mathrm{p} = 1$。因此，低通巴特沃斯原型滤波器函数如图 4.19c 所示。使用相同的符号，对于这个原型低通巴特沃斯滤波器，得到，$A_\mathrm{p} = 0.63\text{dB}$，$A_\mathrm{s} = 48\text{dB}$，$\varepsilon = 0.395$，$n = 4$。

$\boldsymbol{p}$ 平面左半平面的四个极点计算后作为巴特沃斯低通原型滤波器的极点：

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_4 = -0.4827 \pm \mathrm{j}1.1654$$

$$p_2, p_3 = -1.1654 + j0.4827$$

因此原型低通滤波器的传递函数由下式给出

$$H(p) = \frac{2.5317}{p^4 + 3.296p^3 + 5.4325p^2 + 5.24475p + 2.5317} \tag{4.90}$$

低通滤波器的幅度响应如图 4. 20 所示。

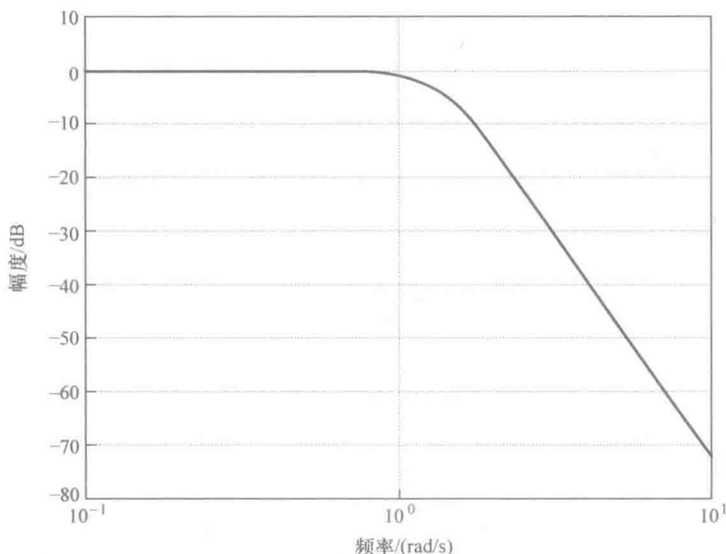


图 4. 20 例 4. 9 模拟原型低通滤波器的幅度响应

接下来在式（4. 90）中替代 $p = (1/0.547)[(2 + 1.705^2)/s]$，简化后，得到传递函数

$$H(s) = \frac{0.2267s^4}{D(s)}$$

这里 $D(s)$ 是

$$\begin{bmatrix} (s^8 + 1.8030s^7 + 13.2535s^6 + 16.5824s^5 + 60.3813s^4 \\ + 48.205s^3 + 112.0006s^2 + 44.2926s + 71.4135) \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

现在在这个例子中，对 $H(s)$ 应用双线性变换 $s = 2[(z-1)/(z+1)]$，并简化数字滤波器的传递函数 $H(z)$

$$H(z) = \frac{3.6272z^8 - 14.5088z^6 + 21.7632z^4 - 14.5088z^2 + 3.6272}{\begin{bmatrix} (3825z^8 - 4221z^7 + 13127z^6 - 9857z^5 + 15753z^4 - 7615z^3 \\ + 7849z^2 - 1934z + 1354) \end{bmatrix}} \tag{4.92}$$

这个函数的幅度响应如图 4. 21 所示。可以看到，数字滤波器传递函数满足给定指标。

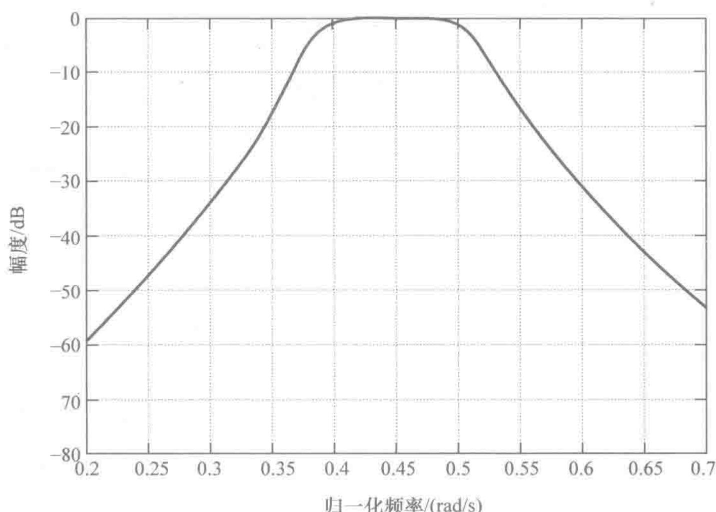


图 4.21　一个数字带通滤波器的幅度响应

设计低通、高通和带通滤波器可使用类似的过程。相比冲激不变转换，我们看到，双线性变换可用来设计高通和带阻滤波器。事实上，使用双线性变换是用于 IIR 数字滤波器的设计近似唯一的幅值要求的最受欢迎的方法。

4.7　数字频谱转换

在上面描述的设计过程中，我们使用双线性变换转换 IIR 数字滤波器幅度指标到 λ 轴上预畸变频率 $H(\mathrm{j}\lambda)$ 的对应部分。然后我们要么比例化 λ 轴上的频率，要么应用模拟频率转换 $\boldsymbol{p}=g(s)$ 简化模拟低通滤波器函数的频率响应。有另一种 IIR 数字滤波器的设计方法，它通过在数字域的频率转换取代模拟频率转换。康斯坦丁尼德斯[1]导出一组数字谱转换（DST）集，可转换任意带宽的低通滤波器，即说，θ_p，对应不同通带的数字高通、带通、带阻滤波器或数字低通滤波器。这些转换类似于模拟频率转换，转换的参数是由这些过滤器的截止频率决定，正如模拟频率转换的情况。让我们用 θ'_p 表示新数字低通或高通滤波器的截止频率；让我们用 θ_u 和 θ_l 分别表示带通和带阻滤波器的上下截止频率，它们都在归一化频率基础上小于 π 弧度。而低通原型模拟滤波器总有一个 1rad / s 的通带，低通数字滤波器有选择任意 θ_p 的通带；然而，我们将称之为低通原型数字滤，用传递函数 $H(z^{-1})$ 表示。应用在数字滤波器的数字谱转换形式是 $\boldsymbol{z}^{-1}=g(z^{-1})$。它映射 $\boldsymbol{z}$ 平面单位圆内的点到 z 平面单位圆内，映射 $\boldsymbol{z}$ 平面单位圆边界到 z 平面单位圆边界上。使用这些必要条件，康斯坦丁尼德斯推导的 LP - LP，LP - HP，

LP – BP 和 LP – BS 变换的数据转换集在表 4.3 中列出，其中 $\theta=\omega T$ 是弧度归一化频率。

表 4.3 数字谱转换

转换形式	转换	常用参数
LP – LP	$z^{-1}=\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$	θ_p = 原型滤波器的通带 θ'_p = 新 LP 滤波器的通带 $a=\frac{\sin\left(\frac{\theta_p-\theta'_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p+\theta'_p}{2}\right)}$
LP – HP	$z^{-1}=-\left(\frac{z^{-1}+a}{1+az^{-1}}\right)$	θ'_p = 高通滤波器的截止频率 $a=\frac{\cos\left(\frac{\theta_p+\theta'_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p-\theta'_p}{2}\right)}$
LP – BP	$z^{-1}=-\left(\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha K}{(K+1)}z^{-1}+\frac{(K-1)}{(K+1)}}{\frac{(K-1)}{(K+1)}z^{-2}-\frac{2\alpha K}{(K+1)}z^{-1}+1}\right)$	θ_l = 带通滤波器的较低截止频率 θ_u = 带通滤波器的较高截止频率 $\alpha=\frac{\cos\left(\frac{\theta_u+\theta_l}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_u-\theta_l}{2}\right)}$ $K=\cot\left(\frac{\theta_u-\theta_l}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$
LP – BS	$z^{-1}=\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{(K+1)}z^{-1}+\frac{1-K}{1+K}}{\frac{1-K}{1+K}z^{-2}-\frac{2\alpha}{(K+1)}z^{-1}+1}$	θ_l = 带阻滤波器的较低截止频率 θ_u = 带阻滤波器的较高截止频率 $\alpha=\frac{\cos\left(\frac{\theta_u+\theta_l}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_u-\theta_l}{2}\right)}$ $K=\cot\left(\frac{\theta_u-\theta_l}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$

例 4.10

选择如 4.9 的例子相同的指标，说明从表 4.3 中使用数字谱转换设计 IIR 滤波器过程。选择低通原型数字滤波器的通带 $\theta_p=0.5\pi$。带通滤波器要求的截止频率的值是 $\theta_l=0.4\pi$，$\theta_u=0.5\pi$。所以我们计算

$$\alpha=\frac{\cos\left(\frac{0.5\pi+0.4\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{0.5\pi-0.4\pi}{2}\right)}=0.158$$

$$K=\cot\left(\frac{0.5\pi-0.4\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{0.5\pi}{2}\right)=6.314$$

$$z^{-1}=\frac{z^{-2}-0.273z^{-1}+0.727}{0.727z^{-2}-0.273z^{-1}+1}$$

现在，要找到低通数字原型滤波器的频率 θ_s 对应带通滤波器映射的规定的阻带频率 $\theta'_s=0.7\pi$，通过在上面给出的数字频谱转换做替代 $z=e^{j0.7\pi}$。找到值 $\theta_s=2.8\text{rad}=0.8913\pi\ \text{rad}$。因此，设计的低通原型数字滤波器指标如图 4.22b 所示。

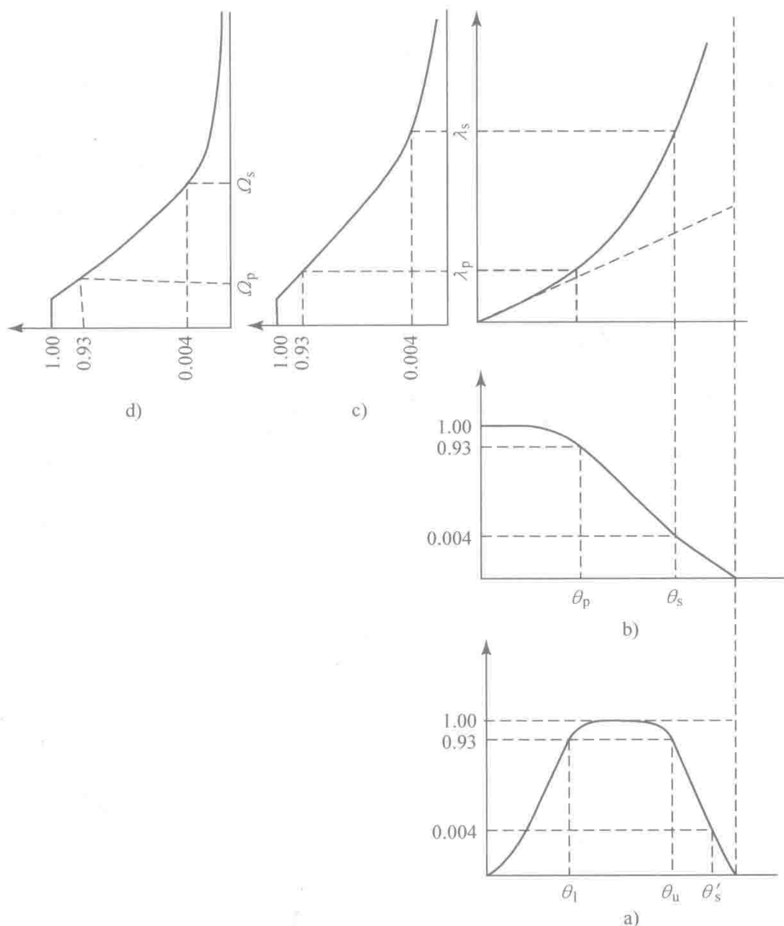


图 4.22　数字谱转换下幅度响应映射

使用对 θ 的映射 $\lambda=2\tan(\theta/2)$，映射此低通滤波器频率响应到低通滤波器响应 $|H(j\lambda)|$，如图 4.22c 所示。计算得 $\lambda_p=2\tan(\pi/4)=1.998$ 和 $\lambda_s=2\tan(2.8/2)=11.6$，分别作为这个滤波器通带和阻带的边缘。所以我们用 1.998 比例化频率得到低通原型滤波器的 $H(j\Omega)$，使归一化带宽 $\Omega_p=1$。阻带频率 Ω_s

比例化到5.8，因为数值不准确，与例4.8所获得的值略有不同。但模拟原型低通滤波器要求的阶数是一样的，从而传递函数与例4.8一样。重述该传递函数如下：注意，此例使用$H(\boldsymbol{p})$表示低通滤波器

$$H(\boldsymbol{p})=\frac{2.5317}{\boldsymbol{p}^4+3.2962\boldsymbol{p}^3+5.4325\boldsymbol{p}^2+5.2447\boldsymbol{p}+2.5317} \tag{4.93}$$

接下来，在$H(\boldsymbol{p})$中用$\boldsymbol{p}=s/1.998$恢复频率比例得到传递函数

$$H(s)=\frac{40.5072}{s^4+6.5924s^3+21.73s^2+41.9576s+40.5072} \tag{4.94}$$

然后对$H(s)$应用双线性变换$s=2[(z-1)/(z+1)]$得到低通原型数字滤波器的传递函数$H(z)$

$$H(z)=\frac{(40.5072z^4+162.0288z^3+243.0432z^2+162.0288z+40.5072)}{(280.0816z^4+160.3808z^3+165.2032z^2+35.6768z+6.7728)} \tag{4.95}$$

最后一步是应用式（4.96）中数字谱转换得到前面在式（4.95）中得到的$H(z)$：

$$z^{-1}=\frac{z^{-2}-0.273z^{-1}+0.727}{0.727z^{-2}-0.273z^{-1}+1} \tag{4.96}$$

最终结果是所需的IIR滤波器的传递函数$H(z)$，可以看出与例4.8中得到结果式（4.92）相同。因此发现幅值与图4.21所示一样，不再重复绘制。与例4.8的方法相比，上述方法不具备任何优势；事实上，它需要更多的计算，特别是在最后一步。然而，如果已经有低通IIR滤波器的传递函数，可以使用数字谱转换获得HP、BP或BS滤波器的传递函数，如果它们的幅值响应类型相同（即巴特沃斯、切比雪夫或椭圆型）和公差允许误差在通带和阻带与低通滤波器一样的话。

4.8 全通滤波器

全通滤波器幅度响应在所有频率处都是一个常数，因此不需要任何近似。

这种滤波器形式是

$$H_{\text{ap}}(z^{-1})=\pm\frac{a(N)+a(N-1)z^{-1}+\cdots+a(2)z^{-(N-2)}+a(1)z^{-(N-1)}+z^{-N}}{1+a(1)z^{-1}+a(2)z^{-2}+\cdots+a(N-1)z^{-(N-1)}+a(N)z^{-N}} \tag{4.97}$$

这是z的降幂的两个多项式之比。注意，分子多项式的系数顺序与分母多项式的系数顺序相反。可以以另一种形式表达式（4.97）：

$$H_{ap}(z^{-1}) = \pm z^{-N}\left[\frac{a(N)z^N + a(N-1)z^{N-1} + \cdots + a(2)z^2 + a(1)z + 1}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \cdots + a(N-1)z^{-(N-1)} + a(N)z^{-N}}\right] \tag{4.98}$$

$$= \pm z^{-N}\left[\frac{1 + a(1)z + a(2)z^2 + \cdots + a(N-1)z^{N-1} + a(N)z^N}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + \cdots + a(N-1)z^{-(N-1)} + a(N)z^{-N}}\right] \tag{4.99}$$

如果式（4.99）的分母用 $D(z^{-1})$ 表示，它的分子是 $z^{-N}D(z)$，它是 $D(z^{-1})$ 的镜像多项式。因此，全通滤波器传递函数的浓缩形式如下所示

$$H_{ap}(z^{-1}) = \frac{z^{-N}D(z)}{D(z^{-1})} \tag{4.100}$$

当全通滤波器所有极点在 z 平面上的单位圆内时，它是一种稳定的函数，其零点在单位圆外，是镜像对称的结果。因此一个稳定、全通滤波器函数是一个非最小函数。

从式（4.101）很容易看出，$H_{ap}(e^{j\omega})$ 的幅度响应在所有频率处均等于 1，而且独立于所有系数：

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = \left|\frac{1 + a(1)e^{j\omega} + a(2)e^{j2\omega} + \cdots + a(N)e^{jN\omega}}{1 + a(1)e^{-j\omega} + a(2)e^{-j2\omega} + \cdots + a(N)e^{-jN\omega}}\right| = 1 \tag{4.101}$$

但相位响应（和群延迟）依赖于全通滤波器的系数。相位响应与式（4.6）定义的一样，逼近要求的幅度响应的 IIR 滤波器是 ω 的非线性函数，因此它的群延迟定义为式（4.8），远非一个常数值。当一个全通滤波器用这种滤波器级联，得到的滤波器的频率响应 $H_1(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega}) = |H_1(e^{j\omega})H_{ap}(e^{j\omega})|e^{j[\theta(\omega)+\phi(\omega)]} = |H_1(e^{j\omega})|e^{j[\theta(\omega)+\phi(\omega)]}$。所以当 IIR 滤波器与一个全通滤波器级联，其幅度响应不会改变，但其相位响应 $\theta(\omega)$ 会变化，由全通滤波器产生一个相位响应增量 $\phi(\omega)$。因此，当它们与 $H_1(z)$ 级联时，全通滤波器 $H_{ap}(z)$ 是非常有用的，它改变相位响应（和群延迟）而不改变给定 IIR 滤波器 $H_1(z)$ 的幅值大小。然而，寻找全通滤波器 $H_{ap}(z)$ 系数使用的方法使 $H_1(z)H_a(z)$ 群延迟非常接近一个常数，而在滤波器 $H_1(z)$ 通带产生一高度的非线性问题，仅有计算机辅助优化被用来解决这个问题。当全通滤波器被设计补偿 IIR 滤波器的群时延，其幅度近似指定指标，这样连接的两个滤波器的群延迟近似恒定值，全通滤波器被称为延迟均衡器。

4.9　使用 MATLAB 设计 IIR 滤波器

使用 MATLAB 函数设计巴特沃斯、切比雪夫 I 型，切比雪夫 II 型和椭圆 IIR 数字滤波器的设计基于双线性变换理论和模拟滤波器。所以它们通常用来近似理想

LP、HP、BP 和 BS 滤波器的分段常数幅值特点。MATLAB 函数 yulewalk 被用来设计具有任意幅度指标的 IIR 滤波器。将在以下部分中描述所有这些函数。

基于双线性变换 IIR 滤波器的设计包括两个步骤：滤波器的阶数估计以及 $H(z^{-1})$ 的分子和分母系数的计算。这些滤波器的设计从下列要求开始：

1）低通滤波器或高通滤波器的通带频率 W_p。对于设计的带通或带阻滤波器这是一个两元素向量 $[W_{p1} \quad W_{p2}]$，其中 $W_{p2} > W_{p1}$。

2）低通滤波器或高通滤波器的阻带频率 W_s，其中对于低通滤波器 $W_s > W_p$ 和高通滤波器 $W_s < W_p$。对于带通或带阻滤波器，W_s 是两要素向量（W_{s1} W_{s2}）。对于带通滤波器，有 $W_{s2} > W_{p2} > W_{p1} > W_{s1}$，对于带阻滤波器，有 $W_{p2} > W_{s2} > W_{s1} > W_{p1}$。所有这些频率在指定区间［0 1］内，其中 1 表示奈奎斯特频率。

3）最大的通带衰减 R_p（dB）。

4）最低小阻带衰减 R_s（dB）。

估计巴特沃斯、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型，和椭圆型滤波器阶数的四个函数，分别给出如下

1）［N，Wn］ =buttord（Wp，Ws，Rp，Rs）

2）［N，Wn］ = cheb1ord（Wp，Ws，Rp，Rs）

3）［N，Wn］ = cheb2ord（Wp，Ws，Rp，Rs）

4）［N，Wn］ = ellipord（Wp，Ws，Rp，Rs）

其中 N 是 LP 和 HP 滤波器的阶数（2N 是 BP 和 BS 滤波器的阶数），Wn 是频率比例因子。然后使用这两个变量在四个 MATLAB 函数中得到向量 b = [b(1) b(2) b(3) … b(N + 1)] 和 a = [a(1) a(2) a(3) … a(N + 1)]，$H(z^{-1})$ 的分子和分母系数按 z 的降序排列。常数系数 a(1) 等于 1：

$$H(z^{-1}) = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + b(3)z^{-2} + \cdots + b(N+1)z^{-N}}{1 + a(2)z^{-1} + a(3)z^{-2} + \cdots + a(N+1)z^{-N}} \tag{4.102}$$

注意，在函数［N，Wn］= buttord（Wp，Ws，Rp，Rs）中，Rp 值受限于 3dB，因为双线性变换下选择的模拟原型低通滤波器设计巴特沃斯滤波器使用 3dB 带宽。在信号处理工具箱中有几个可用的设计模拟滤波器的 MATLAB 函数——buttap、cheb1ap、cheb2ap 和 ellipap——和在本章中讨论的模拟频率转换实现函数是 lp2bp、lp2hp 和 lp2bs。然而，我们关注四个用于 IIR 数字滤波器设计的 MATLAB 函数。我们获得滤波器阶数 N 后，函数描述如下：

1) `[b,a] = butter(N,Wn)`

2) `[b,a] = cheby1(N,Rp,Wn)`

3) `[b,a] = cheby2(N,Rs,Wn)`

4) `[b,a] = ellip(N,Rp,Rs,Wn)`

获得传递函数的系数之后，使用函数 freqz（b，a，N0）获得幅度响应、相位响应和群延迟响应，可以画出图。N0 是［0 π］间隔内离散频率的数量，用户可选择。

对于高通滤波器和带阻滤波器的设计，我们需要包含一个字符串“high”和“stop”作为最后的参数在滤波器函数中，例如，[b，a] =butter（N，Wn,'high'）用于设计一个巴特沃斯高通滤波器，[b，a] = cheby2（N，Rs，Wn,'stop'）用于设计一个切比雪夫Ⅱ型阻带滤波器。在这些函数中，N 和 Wn 的值在第一步得到，用于估算滤波器阶数函数的输出变量。我们通过几个例子说明这些 MATLAB 函数的使用。

例 4.11

```
%MATLAB script to design a Elliptic Lowpass filter
 % with the specifications:.Wp = 0.4,Ws = 0.5, Rp = 0.5,
   % Rs = 60
 [N,Wn]=ellipord(0.4, 0.5, 0.5,60);
 [b,a]=ellip(N,0.5,60,Wn);
 [h,w]=freqz(b,a,256);
 H=abs(h);
 HdB=20*log10(H);
 plot(w/pi,H);grid
 title('Magnitude response of a Elliptic Lowpass filter')
 ylabel('Magnitude')
 xlabel('Normalized frequency')
 figure
 plot(w/pi,HdB);grid
 title('Magnitude response of a Elliptic Lowpass filter')
 ylabel('Magnitude in~dB')
 xlabel('Normalized frequency')
 %end
```

找到滤波器的阶数是 7，其幅值绘制在图 4.23 和图 4.24 中。图 4.23 显示通带等波纹，图 4.24 显示在阻带等波纹幅值（dB），最小衰减是 60dB。

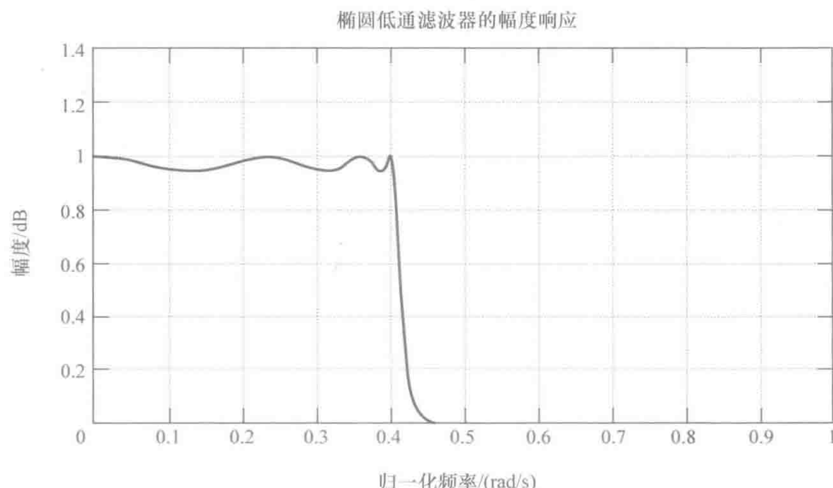


图 4.23　一个椭圆低通滤波器的幅度响应

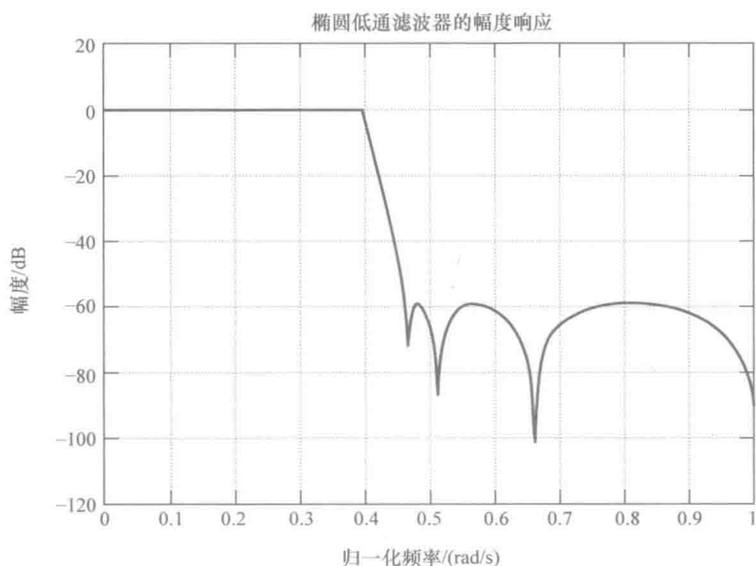


图 4.24 一个椭圆低通滤波器的幅度响应

例 4.12

```
% MATLAB Script to design a Chebyshev I (Equiripple) Bandpass
%  filter with Ws1 = 0.25, Wp1 = 0.3, Wp2 = 0.4 ,Ws2 = 0.45,
%  Rp = 0.5, Rs = 50
[N,Wn]=chebyord([0.3 0.4],[0.25 0.45],0.5,50);
[b,a]=cheby1(N,0.5,Wn)
[h,w]=freqz(b,a,256);
H=abs(h);
HdB=20*log10(H);
plot(w/pi,H);grid
title('Magnitude response of a Chebyshev I Bandpass filter')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
%end
```

这滤波器阶数是 12，幅度响应如图 4.25 所示。

例 4.13

```
% MATLAB script to design a Butterworth Bandstop filter
%  with Wp1 = 0.18, Ws1 = 0.2, Ws2 = 0.205, Wp2 = 0.24,
%  Rp = 0.5 and Rs = 50
 Wp=[0.18 0.24];
 Ws=[0.2 0.205];
 [N,Wn]=buttord(Wp,Ws,0.5,50);
```

```
[b,a]=butter(N,Wn,'stop');
[h,w]=freqz(b,a,256);
H=abs(h);
plot(w/pi,H);grid
title('Magnitude response of a Butterworth Bandstop filter')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
% end
```

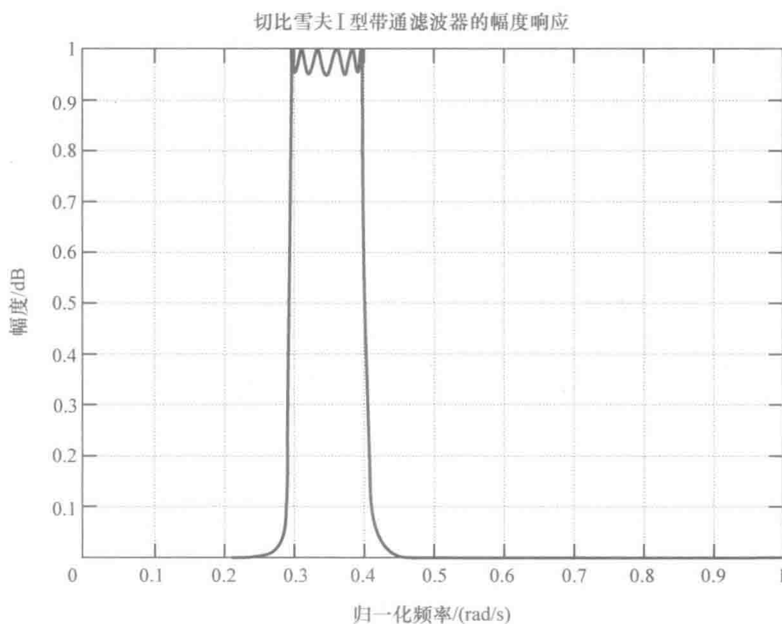


图 4.25 切比雪夫Ⅰ型带通滤波器的幅度响应

这个滤波器阶数是 8，其幅度响应如图 4.26 所示，就像一个陷波滤波器。它可以用来过滤掉单频信号，其衰减超过 65dB。因为这个频率 $\omega = 0.2$，它是奈奎斯特频率的 20% 或采样频率的 10%。所以如果选择采样频率为 600Hz，可以使用这个滤波器来过滤掉音频设备中由电源供电产生 60Hz 不良的嗡嗡声。

MATLAB 脚本输出的数字滤波器系数复制如下：

b = numerator coefficients (columns1 − 9)：

0.9168　−5.9000　17.9049　−32.9698　40.1175　−32.9698　17.9049　−5.9000　0.9168

a = denominator coefficients(columns1 − 9)：

1.0000　−6.2955　18.6910　−33.6739　40.0927　−32.2433　17.1366　−5.5267　0.8406

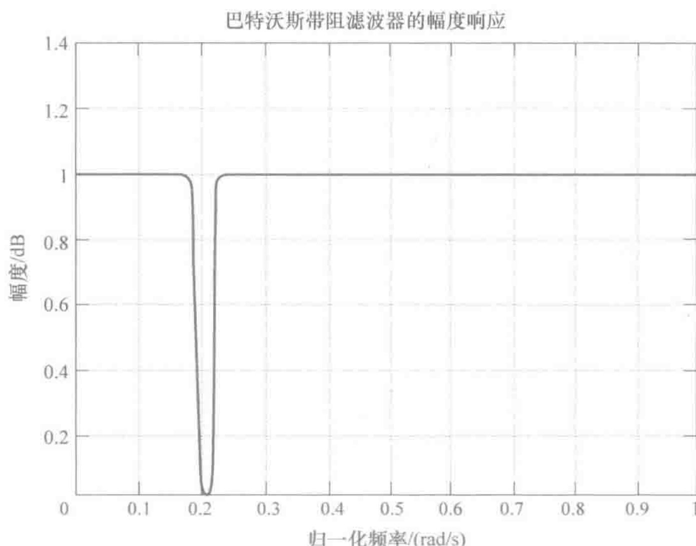


图 4.26 巴特沃斯带阻滤波器的幅度响应

例 4.14

```
% MATLAB script to design a Chebyshev II highpass filter
 % with Wp=0.5,Ws=0.4,Rp=0.5 and Rs=60
 [N,Wn]=cheb2ord(0.5,0.4,0.5,60)
 [b,a]=cheby2(N,60,Wn,'high');
 [h,w]=freqz(b,a,256);
 H=abs(h);
 HdB=20*log10(H);
 plot(w/pi,H);grid
 title('Magnitude response of a Chebyshev II Highpass Filter')
 ylabel('Magnitude')
 xlabel('Normalized frequency')
 % end
```

这个滤波器的阶数是 11，如图 4.27 和图 4.28 所示。

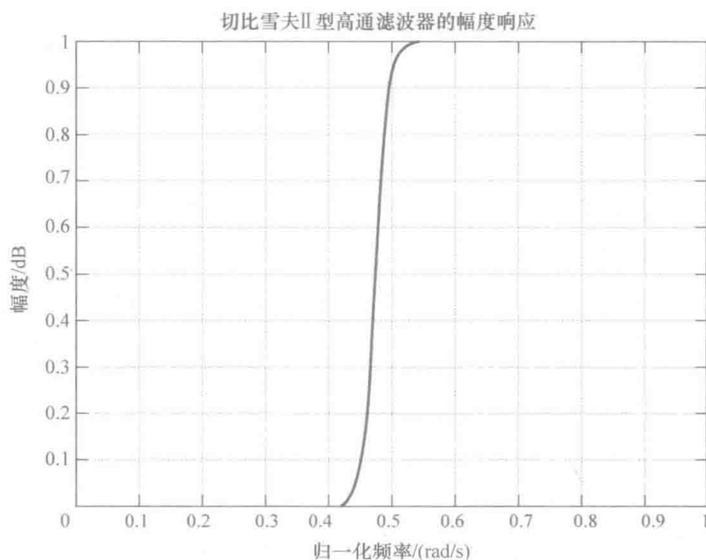


图 4.27　切比雪夫Ⅱ型高通滤波器的幅度响应

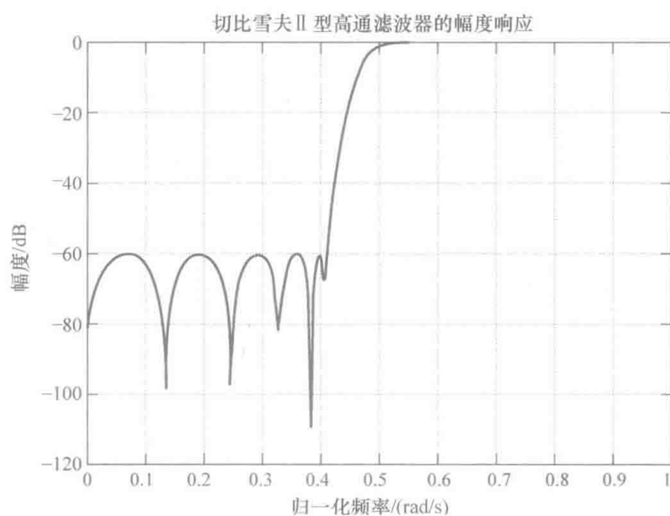


图 4.28　切比雪夫Ⅱ型高通滤波器的幅度响应

4.10 YULE－WALKER 近似

现在我们介绍介绍另一个函数 yulewalk，找到一个任意幅度的 IIR 滤波器。这个方法最小化由向量 D 表示的期望幅度与最小二乘意义的 IIR 滤波器 $H(e^{j\omega})$ 幅度之间的误差。

除了目前讨论的最大平坦近似和极小极大近似（切比雪夫或等波纹），还有最小二乘近似，被广泛用于滤波器设计和其他系统设计。更一般情况下的最小化误差被称为 p 阶近似。它被定义为

$$J_3(\omega) = \int_{\omega \in R} W(e^{j\omega}) \left| H(e^{j\omega}) - D(e^{j\omega}) \right|^p d\omega$$

而 $p=2$ 时，它被称为最小二乘近似。在上面所示的误差函数中，$D(e^{j\omega})$是期望的频率响应，$H(e^{j\omega})$是设计滤波器的响应，而 $W(e^{j\omega})$是设计者选择的一个加权函数。人们已经发现，随着 p 接近∞，误差在极小极大意义上被最小化，而在实践中，选择 $p=4$、5、6 在最小 p 阶意义上对 $D(e^{j\omega})$产生一个好的近似[14]。当使用 MATLAB 函数 yulewalk 时，最好避免期望的幅度响应急剧变化。其函数形式是

```
[num,den] = yulewalk(N,F,D)
```

其中 F 是 0 到 1.0 之间的离散频率向量，其中 1.0 表示奈奎斯特频率；向量 F 必须包括 0 和 1.0。向量 D 包含向量 F 中频率对应的要求幅值；因此，两个向量具有相同的长度。N 是滤波器阶数。分子和分母的系数向量输出的数据在 num 和 den 中，如式（4.102）所示。

例 4.15

```
% MATLAB script to design a IIR filter using the function
%  yulewalk.
 F=[0 0.3 0.7 0.8 1.0];
 D=[0 0.8 0.6 0.3 0.5];
 [num,den]=yulewalk(10,F,D);
 [h,w]=freqz(num,den,256);
 H=abs(h);
 plot(w/pi,H);grid
 title('Magnitude of an IIR filter by Yulewalker approximation')
 ylabel('Magnitude')
 xlabel('Normalized frequency')
```

阶数为 10 的 IIR 滤波器幅值包含在此例中，如图 4.29 所示。我们可以增加或减少滤波器阶数和选择满足应用要求的设计方案。

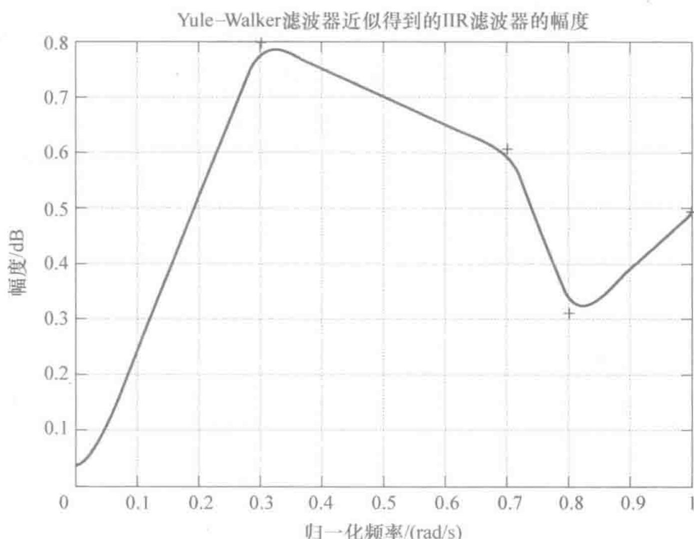


图 4.29　用 Yule – Walker 近似的 IIR 滤波器幅度响应

4.11　小结

在本章中，讨论了三个主题。首先，讨论了近似理想模拟滤波器分段恒定幅值的理论和设计过程，紧随其后的是 IIR 滤波器的理论和设计过程。这些都是要么最大平坦要么等波纹意义上要求的分段恒定幅值近似的低通、高通、带通或带阻滤波器。需要指出，双线性变换下模拟滤波器恒定群延迟并不能转换 IIR 滤波器恒定群延迟。近似恒定群延迟的 IIR 滤波器设计过程单独在本章参考文献［10］中描述。

接下来，描述了用于设计这些 IIR 滤波器（如椭圆函数滤波器）的 MATLAB 函数。最后，描述了最小二乘意义下近似任意幅度响应的 MATLAB 函数 yulewalk 的使用。另外的近似准则的 IIR 滤波器设计将在第 7 章描述。

习题

4.1　从下列传递函数求 $|H(j\omega)|^2$

$$H_1(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2}$$

$$H_2(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+4s+20)}$$

4.2 从下列函数求传递函数 $H(s)$：

$$|H_1(j\omega)|^2=\frac{(\omega^2+9)}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)} \tag{4.103}$$

$$|H_2(j\omega)|^2=\frac{(\omega^2+4)}{(\omega^2+16)(\omega^4+1)} \tag{4.104}$$

4.3 一个模拟信号 $x(t)=e^{-2t}u(t)$，采样后生成离散时间序列 $x(nT)=e^{-2nT}u(n)$。求 DT 序列 $T=0.1\text{s}$、0.05s、0.01s 时的 z 变换 $X(z)$。

4.4 一个模拟信号 $x(t)=10\cos(2t)u(t)$，采样生成离散时间序列 $x(nT)=10\cos(2nT)u(n)$。求 DT 序列 $T=0.1\text{s}$、0.01s 时的 z 变换 $X(z)$。

4.5 推导当把冲激不变变换和双线性变换 $s=2[(z-1)/(z+1)]$ 应用在传递函数 $H(s)=1/(s^2+\sqrt{2}s+1)$ 时得到的 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$，并用 z 多项式比简化传递函数。

4.6 应用冲激不变变换求下列 $H(s)$ 的 z 变换，假定 $T=0.1\text{s}$：

$$H_1(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$H_2(s)=\frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$H_3(s)=\frac{s(s^2+4s+10)}{(s+5)(s^2+6s+15)}$$

4.7 通过对 $H(s)$ 应用冲激不变变换得到下列传递函数。求 $H(s)$，假设 $T=0.1\text{s}$：

$$H_1(z)=\frac{2z}{(z-e^{-0.2})(z-e^{-0.1})}$$

$$H_2(z)=\frac{z-e^{-0.6}}{(z-e^{-0.5})(z-e^{-0.4})}$$

$$H_3(z)=\frac{z}{(z-0.9)(z-0.3)}$$

$$H_4(z)=\frac{z}{(z-0.4)(z-0.8)}$$

4.8 应用双线性变换到模拟传递函数 $H(s)$，得到以下数字滤波器的传递函数。推导出传递函数 $H(s)$，假设 $T=0.1\text{s}$：

$$H_1(z)=\frac{z+1}{z^2+z+6}$$

$$H_2(z)=\frac{z+4}{z^2+6z+8}$$

$$H_3(z)=\frac{2z+5}{z^2+2z+2}$$

4.9　求幅度响应如图 4.30 所示的四阶切比雪夫 I 型高通模拟滤波器在频率 $\omega_s=1000\mathrm{rad/s}$ 处的幅值。

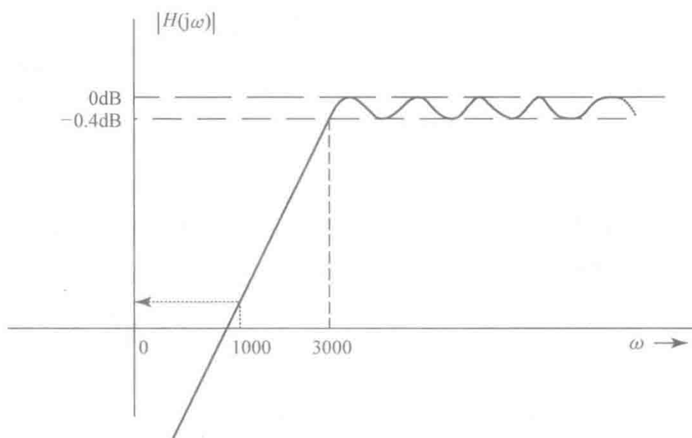


图 4.30　习题 4.9

4.10　切比雪夫 I 型带阻模拟滤波器设计要求逼近以下指标：$\omega_{p1}=10^4$ 和 $\omega_{p2}=7\times10^4$ 是通带截止频率。通带波纹为 0.5dB，$\omega_{s1}=2\times10^4$ 是一个阻带频率，阻带的最小衰减 =30dB。阻带频率 Ω_s 和低通原型滤波器 $H(p)$ 的阶数分别是多少？

4.11　切比雪夫 I 型滤波器的幅度响应如图 4.31 所示，其阶数是多少？

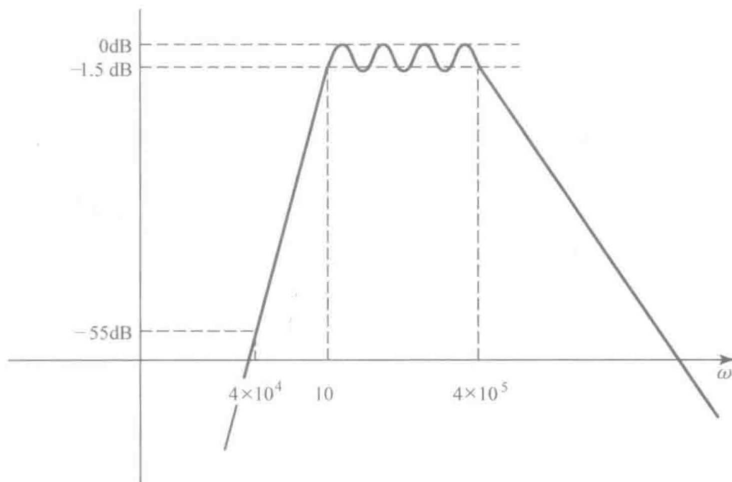


图 4.31　习题 4.11

4.12　若模拟滤波器的频率 $s=\mathrm{j}15$ 映射到数字滤波器归一化频率 $\omega=0.3\pi$，

请确定采样周期 T。

4.13 一个数字巴特沃斯低通滤波器是通过将双线性变换形式应用在一个在1200rad/s 时有 45dB 衰减的模拟巴特沃斯低通滤波器的传递函数上来设计的。当采样频率是 1000Hz 时，数字滤波器有 45dB 衰减时的频率（rad/s）是多少呢？

4.14 一个数字切比雪夫带通滤波器是通过将双线性变换形式应用在一个在1400～1600rad/s 之间有 200rad/s 带宽的模拟切比雪夫带通滤波器的传递函数上来设计的。那么当采样频率是 1500Hz 时，数字滤波器的带宽是多少呢？

4.15 用双线性变换形式设计的巴特沃斯带通 IIR 型数字滤波器有如图 4.32 所示的幅度响应，求滤波器的阶数。

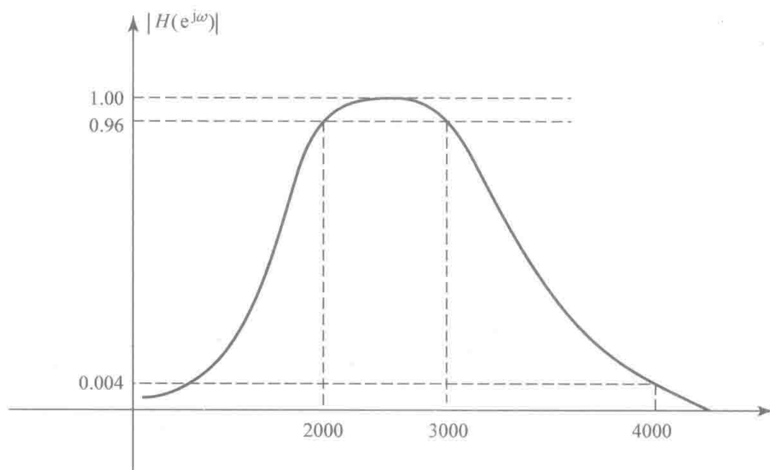


图 4.32 习题 4.15

4.16 采用双线性变换形式设计的巴特沃斯 IIR 型低通滤波器在截止频率 $\omega_c=0.3\pi$ 处的最大衰减是 0.5dB。在阻带截止频率 $\omega_s=0.8\pi$ 的最小衰减是 40dB。求当使用双线性变换时的原型低通滤波器的传递函数 $H(p)$。

4.17 求巴特沃斯低通 IIR 滤波器在频率（0.8π）处的幅值。滤波器的阶数是 10，采样频率为 10^3Hz，滤波器 3dB 带宽是（0.2π）。

4.18 频率 ω_{s2} 和 ω_{s1} 为多少时，10 阶巴特沃斯模拟带通滤波器幅值是 0.045？设滤波器幅度响应如图 4.33 所示。

4.19 图 4.34 所示幅度响应的切比雪夫带通 IIR 滤波器阶数是多少？

4.20 设计一个模拟高通切比雪夫滤波器，逼近指标如图 4.35 所示。

4.21 设计巴特沃斯带通 IIR 滤波器，逼近指标如图 4.36 所示。列出所有的计算步骤。用 MATLAB 绘出幅度响应。

4.22 巴特沃斯带通 IIR 滤波器阶数为 10，满足下列指标：$\omega_{p1}=0.5\pi$，

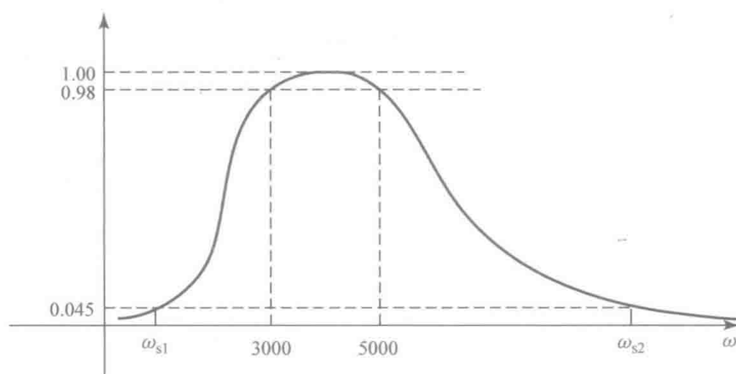


图 4.33　习题 4.18

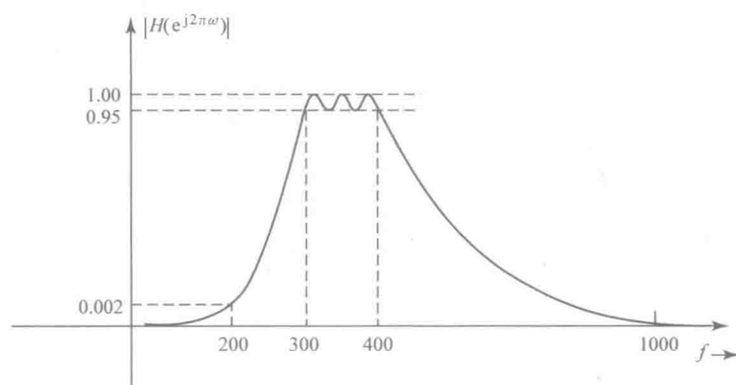


图 4.34　习题 4.19

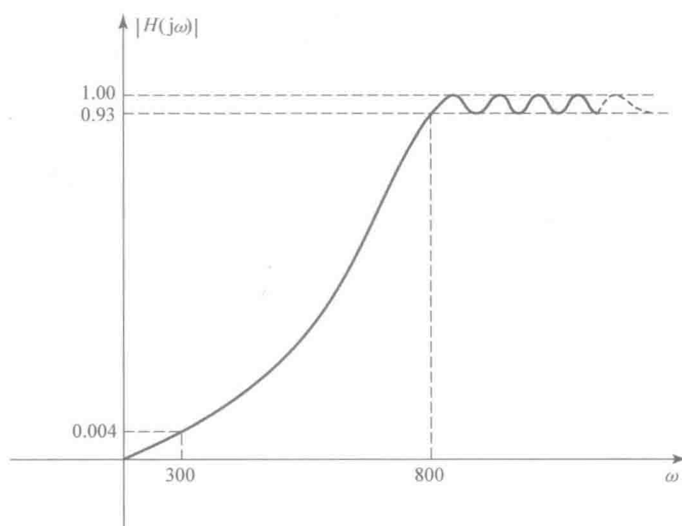


图 4.35　习题 4.20

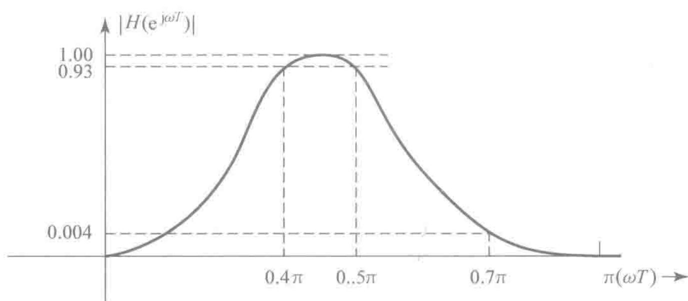


图 4. 36 习题 4. 21

$\omega_{p2}=0.65\pi$，$\omega_{s2}=0.8\pi$，$A_p=0.5\text{dB}$。ω_{s2}处的衰减是多少？

4. 23 带阻切比雪夫 I 型数字滤波器满足下列指标：$\omega_{p1}=0.1\pi$，$\omega_{p2}=0.8\pi$，$\omega_{s2}=0.4\pi$，$\alpha_p=0.8$，$\alpha_s=55$。求低通模拟原型滤波器的传递函数 $H(p)$。

4. 24 巴特沃斯高通数字滤波器的通带截止频率为 1500Hz，阻带截止频率为 650Hz，通带衰减为 2. 0dB，阻带衰减 45dB。采样周期是 0.2×10^{-3}s。求低通模拟原型滤波器的传递函数 $H(p)$。

4. 25 设计带通切比雪夫 I 型 IIR 滤波器，近似性能指标如图 4. 37 所示。列出所有的计算步骤，假设采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$。使用 MATLAB 绘制幅度响应图。

4. 26 求巴特沃斯低通 IIR 滤波器的传递函数，其中 $\omega_p=0.4\pi$，$\omega_s=0.9\pi$，$R_p=0.5$，$R_s=20$。使用数字谱变换 LP – HP，求截止频率为 0.75π 的高通滤波器的传递函数。

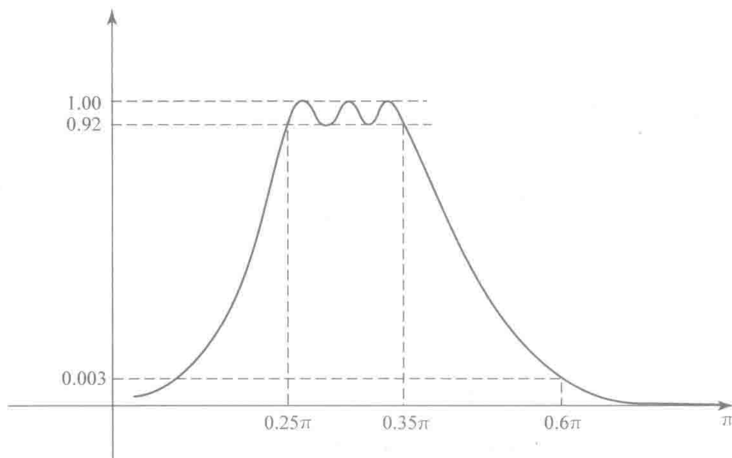


图 4. 37 习题 4. 25

4. 27 推导出如图 4. 38 和图 4. 39 所示两个电路的传递函数，并验证它们是

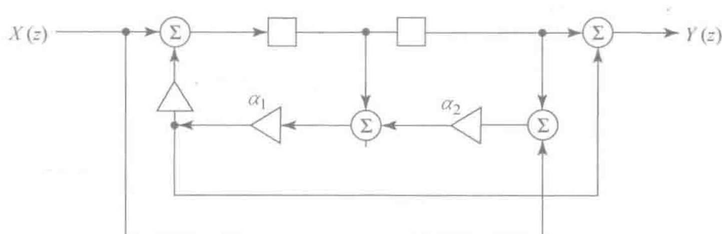


图 4.38　习题 4.27a

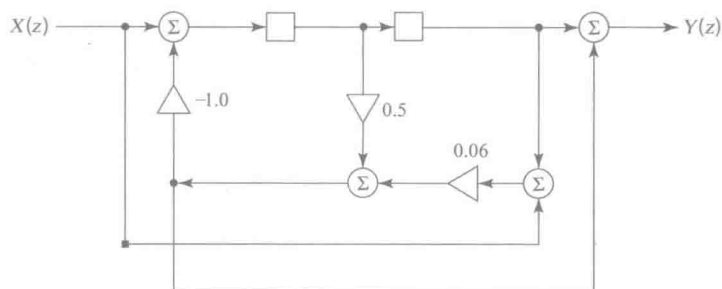


图 4.39　习题 4.27b

全通滤波器。

4.28　模拟全通滤波器的传递函数 $H(s)=(s^2-as+b)/(s^2+as+b)$，在所有频率处幅度响应等于 1。证明，由 $H(s)$ 双线性变换应用得到的 IIR 滤波器也是一个全通数字滤波器。

MATLAB 习题

4.29　设计巴特沃斯带阻滤波器，其中 $W_{p1}=0.2$，$W_s=0.35$，$W_{s2}=0.55$，$W_{p2}=0.7$，$R_p=0.25$，$R_s=45$。绘出幅度和群延迟响应。

4.30　设计一个切比雪夫 I 型带通滤波器，满足下列指标：$W_{s1}=0.4$，$W_{p1}=0.45$，$W_{p2}=0.55$，$W_{s2}=0.6$，$R_p=0.3$，$R_s=50$。绘制幅度（dB）和群延迟响应并验证是否满足设计要求。

4.31　设计一个切比雪夫 Ⅱ 型高通滤波器，$W_s=0.1$，$W_p=0.3$，$R_p=0.8$，$R_s=60\text{dB}$。绘制幅度响应（dB）和滤波器的群时延，验证设计满足指标要求。

4.32　设计一个椭圆低通滤波器，$W_p=0.2$，$W_s=0.35$，$R_p=0.8$，$R_s=40$。绘制滤波器幅度（dB）和群响应。

4.33　设计一个椭圆低通滤波器，$W_{p1}=0.3$，$W_s=0.4$，$R_p=0.5$，$R_s=55$。

绘制滤波器幅值（dB）和群延迟响应。绘制阻带响应放大图，验证是否满足设计要求。

4.34 设计巴特沃斯带通滤波器，$W_{s1}=0.3$，$W_{p1}=0.5$，$W_{p2}=0.55$，$W_{s2}=0.8$，$R_p=0.5$，$R_s=50$。绘制其幅度和相位响应。

4.35 设计 IIR 滤波器，具有以下指标：$F=[0\ 0.2\ 0.4\ 0.5\ 1.0]$，$D=[1.0\ 0.5\ 0.7\ 0.9\ 1.0]$，使用 yulewalk 函数。绘制滤波器幅度图。

4.36 使用 MATLAB 函数 yulewalk 设计 IIR 滤波器，具有以下指标。$F=[0.0\ 0.3\ 0.5\ 0.7\ 0.9\ 1.0]$；$D=[0.2\ 0.4\ 0.5\ 0.3\ 0.6\ 1.0]$。绘制滤波器幅度图。

4.37 设计 IIR 滤波器，其幅度响应逼近指标 $F=[0.0\ 0.2\ 0.4\ 0.6\ 0.8\ 1.0]$；$D=[1.0\ 0.18\ 0.35\ 0.35\ 0.18\ 1.0]$，使用 MATLAB 函数 yulewalk 设计。绘制滤波器幅度和群延迟响应。

参考文献

1. A. C. Constantinides, Spectral transformations for digital filters, *Proc. IEE* **117**, 1585–1590 (Aug. 1970).
2. A. I. Zverev, *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, 1967.
3. R. Schaumann and M. E. Van Valkenburg, *Design of Analog Filters*, Oxford Univ. Press, 2001.
4. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing—A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 2001.
5. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.
6. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
7. A. Antoniou, *Digital Filters, Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, 1993.
8. E. C. Ifeachor and B. W. Jervis, *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Prentice-Hall, 2002.
9. L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
10. B. A. Shenoi, *Magnitude and Delay Approximation of 1-D and 2-D Digital Filters*, Springer-Verlag, 1999.
11. V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB$^{(R)}$ V.4*, PWS Publishing, 1997.
12. R. W. Hamming, *Digital Filters*, Prentice-Hall, 1989.
13. L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
14. G. C. Temes and D. Y. F. Zai, Least p^{th} approximation, *IEEE Trans. Circuit Theory* **CT-16**, 235–237 (1969).
15. MATLAB$^{(R)}$ and Signal Processing Tool Box, software from The MathWorks, Natick, MA.

第5章　有限冲激响应滤波器

5.1　简介

从前面两章，我们已经熟悉了理想低通、高通、带通和带阻滤波器的幅度响应，其是由IIR滤波器逼近的。在前面章节，我们还讨论了相关理论和一些设计IIR滤波器的经典流程。

一个线性时不变离散时间系统（LTIDT系统）差分方程的一般形式是

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) \tag{5.1}$$

这个系统的传递函数是

$$H(z^{-1}) = \frac{b_0 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \cdots + b(M)z^{-M}}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + a(3)z^{-3} + \cdots + a(N)z^{-N}} \tag{5.2}$$

特别的，FIR滤波器的传递函数是

$$H(z^{-1}) = b_0 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + \cdots + b(M)z^{-M} \tag{5.3}$$

而这个FIR滤波器的差分方程描述为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b(k)x(n-k) \tag{5.4}$$

$$= b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \cdots + b(M)x(n-M) \tag{5.5}$$

在这一章，FIR滤波器的性质和它们的设计将会被讨论。当输入函数$x(n)$是单位采样函数$\delta(n)$，输出$y(n)$可以通过式（5.4）的递归算法获得。我们得到由单位采样输入$\delta(n)$产生的输出$y(n)$是确切的值$b(0)$，$b(1)$，$b(2)$，$b(3)$，…，$b(M)$。由单位采样函数$\delta(n)$产生的输出是单位采样响应或单位冲激响应，用$h(n)$表示。所以单位冲激响应样本$h(n)=b(n)$，这意味着差分方程式（5.4）描述的离散时间系统的单位冲激响应$h(n)$是有限长的。这就是为什么这个系统称为FIR滤波器。它也有熟知的其他名字，如横向滤波器、非回归滤波器、滑动平均滤波器、抽头延迟滤波器。因为FIR滤波器$h(n)=b(n)$，我们可以用下列形式表达式（5.3）：

$$H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{M} h(k)z^{-k} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(M)z^{-(M)} \tag{5.6}$$

式（5.1）定义的FIR滤波器较IIR滤波器有一些优势：

1）以这样一种方式可以很容易设计满足要求的幅度响应的 FIR 滤波器，且达到一个恒定的群延迟。群延迟定义为 $\tau=-(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\omega)$，$\theta$ 为滤波器的相位响应。具有恒定群延迟的滤波器相位响应因此是频率的线性函数。它以相同数量的延迟来传输所有的频率，这意味着没有任何相位失真，当输入信号传播到输出时，它有一个恒定的群延迟。在数字信号传输中，具有恒定群延迟的滤波器是非常可取的。

2）FIR 滤波器单位冲激响应采样和传递函数的系数一样，正如从式（5.6）和式（5.5）看到的那样。不需要从 $H(z^{-1})$ 计算 $h(n)$，比如在迭代优化过程的每个阶段或从 $H(z^{-1})$ 设计结构（电路）中。

3）FIR 滤波器总是稳定的，无极限环存在，这源于乘法器常数和信号值用有限字长表达的结果。

4）有限字长对 FIR 要求频率响应或时域响应或输出噪声的影响小于 IIR 滤波器。

5）虽然 IIR 滤波器 $h(n)$ 的单位冲激响应是一个无限长序列，但是在大多数实际情况下，假定样本值有限数量后几乎可以忽略是合理的；因此，为离散时间信号选择一个有限长度序列允许我们使用强大的数值方法处理有限长度信号。

5.1.1 符号

请记住，在本章，我们选择 FIR 滤波器阶数或多项式 $H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{N}h(n)z^{-n}$ 阶数为 N，滤波器长度等于式（5.6）中系数数量，是 $N+1$。如果我们给出 $H(z^{-1})=0.3z^{-4}+0.1z^{-5}+0.5z^{-6}$，它的阶数是 6，虽然只有三项存在，系数正确的数量等于滤波器长度，是 7，因为 $h(0)=h(1)=h(2)=h(3)=0$。这有必要指出在本章使用的符号，因为在一些教科书中，我们可能发现用 $H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$ 表示 FIR 滤波器传递函数，其中滤波器长度用 N 表示而多项式次数或阶数是（$N-1$）。（因此学生必须小心使用不同书籍中的滤波器公式，但注意，它们可以用（$N-1$）替换本章的 N，以匹配这些书中出现的公式。）

MATLAB 中常使用的表达式是 $H(z^{-1})=h(1)+h(2)z^{-1}+h(3)z^{-2}+\cdots+h(N+1)z^{-N}$，$N$ 是一个多项式阶数，有（$N+1$）个系数。用更紧凑的形式表示如下

$$H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{N}h(n+1)z^{-n} \tag{5.7}$$

关于离散时间系统和数字信号处理中角频率的符号和意义也需要学生理解清楚。一是熟悉一个正弦信号 $x(t)=A\sin(wt)$，其中 $w=2\pi f$ 是角频率，单位为

rad/s，f 是频率，单位为 Hz，它是周期 T_p（单位为 s）的倒数。所以有 $w=2\pi/T_p$ rad/s。现在如果用均匀采样周期采样这个信号，需要将信号周期 T_p 与信号采样周期 T_s 区分开。因此，采样序列是由 $x(nT_s)=A\sin(wnT_s)=A\sin(2\pi nT_s/T_p)=\sin(2\pi f/f_s)=\sin(w/f_s)$ 给出。频率 w（rad/s）被 f_s 归一化，几乎总是用 ω 表示，称为归一化频率（弧度表示）。频率 w 是模拟频率变量，频率 ω 是标准化归一化数字频率。基于此，采样频率 $\omega_s=2\pi$。有时，w 被 πf_s 或 $2\pi f_s$ 归一化使相应的采样频率成为 2rad 或 1rad。注意，当没有明确说明时，数字信号处理文献上的采样周期几乎总是用 T 表示，归一化频率用 $\omega=wT$ 表示。用 rad/s 表示的角频率与 DSP 文献中使用的归一化频率之间的差别已在本书的几个实例中指出。

5.2　线性相位滤波器

现在我们考虑 FIR 滤波器的特殊类型，其中传递函数 $H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{N}h(n)z^{-n}$ 的系数 $h(n)$ 假定是对称或反对称的。因为这两种形式的每一个多项式阶数要么是偶数要么是奇数，所以我们有四种不同类型的滤波器，描述如下：

类型 I。系数对称［即 $h(n)=h(N-n)$］，阶数 N 为偶数。

例 5.1

考虑一个简单的例子：

$$H(z^{-1})=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}+h(4)z^{-4}+h(5)z^{-5}+h(6)z^{-6}$$ ㊀

如图 5.1 所示，对于 I 型滤波器，$N=6$，我们看到，$h(0)=h(6)$，$h(1)=h(5)$，$h(2)=h(4)$。使用这些等量关系，得到

$$H(z^{-1})=h(0)(1+z^{-6})+h(1)(z^{-1}+z^{-5})+h(2)(z^{-2}+z^{-4})+h(3)z^{-3} \tag{5.8}$$

这也可用以下形式表达

$$H(z^{-1})=z^{-3}[h(0)(z^{3}+z^{-3})+h(1)(z^{2}+z^{-2})+h(2)(z+z^{-1})+h(3)] \tag{5.9}$$

让我们估算其频率响应（DTFT）：

$$\begin{aligned}H(e^{-j\omega})&=e^{-j3\omega}[2h(0)\cos(3\omega)+2h(1)\cos(2\omega)+2h(2)\cos(\omega)+h(3)]\\&=e^{j\theta(\omega)}[HR(\omega)]\end{aligned}$$

㊀ 原书为 $h(3)z^{-1}$，有误。——译者注

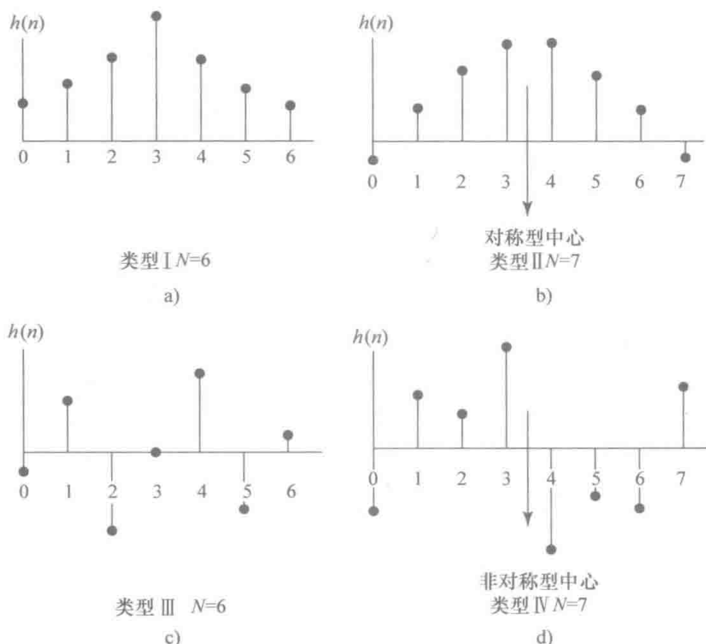


图 5.1 4 种类型线性相位滤波器的单位冲激响应

方程中 $H_R(\omega)$是一个实值函数，但它在任何特定的频率上可能为正或负，所以当它从一个正值变为一个负值时，相角的变化为 πrad（180°）。相位角 $\theta(\omega)=-3\omega$ 是 ω 的一个线性函数，且群延迟 τ 等于 3 个样本。注意，在归一化频率基础上，群延迟等于三个样本，但实际的群延迟是 $3T$s，其中 T 是采样周期。

在一般情况下，我们能用其他一些形式表达 $H(e^{j\omega})$，例如

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N} h(n)e^{-jn\omega} \\
&= h(0)+h(1)e^{-j\omega}+h(2)e^{-j2\omega}+\cdots+h(N)e^{-j(N\omega)}\text{[㊀]} \\
&= e^{-j[(N/2)\omega]}\left\{2h(0)\cos\left(\frac{N\omega}{2}\right)+2h(1)\cos\left[\left(\frac{N}{2}-1\right)\omega\right]\right. \\
&\quad \left.+2h(2)\cos\left[\left(\frac{N}{2}-2\right)\omega\right]+\cdots+h\left(\frac{N}{2}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

用一个更紧凑的形式表示：

$$
H(e^{j\omega}) = e^{-j[(N/2)\omega]}\left\{h\left(\frac{N}{2}\right)+2\sum_{n=1}^{N/2}h\left(\frac{N}{2}-n\right)\cos(n\omega)\right\} = e^{j\theta(\omega)}\{H_R(\omega)\}
\tag{5.11}
$$

㊀ 原书为 $h(N-1)e^{-j(N\omega)}$，有误。——译者注

对于Ⅰ型 FIR 滤波器，在一般情况下，总群延迟是一个常数 $=N/2$。

类型Ⅱ。系数对称［即 $h(n)=h(N-n)$］，阶数 N 为奇数。

例 5.2

在这里，我们考虑一个例子，系数是对称的，但 $N=7$，如图 5.1 所示。对于这个示例，我们有

$$H(z^{-1}) = h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}+h(4)z^{-4}+h(5)z^{-5} +h(6)z^{-6}+h(7)z^{-7}$$

由于对称

$$h(0)=h(7),\ h(1)=h(6),\ h(2)=h(5),\ h(3)=h(4)$$

因此

$$H(z^{-1})=h(0)(1+z^{-7})+h(1)(z^{-1}+z^{-6})+h(2)(z^{-2}+z^{-5}) +h(3)(z^{-3}+z^{-4})$$

频率响应

$$\begin{aligned} H(e^{-j\omega}) &= e^{-j3.5\omega}[2h(0)\cos(3.5\omega)+2h(1)\cos(2.5\omega) \\ &\quad +2h(2)\cos(1.5\omega)+2h(3)\cos(0.5\omega)] \\ &= e^{j\theta(\omega)}H_R(\omega) \end{aligned}$$

相位角度 $\theta(\omega)=-3.5\omega$，而且群延迟 $\tau=3.5$ 样本。

Ⅱ型滤波器在一般情况下，可得

$$\begin{aligned} H(e^{-j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N}h(n)e^{-jn\omega} = e^{j\theta(\omega)}H_R(\omega) \\ &= e^{-j(\frac{N}{2}\omega)}\left[\sum_{n=1}^{(N+1)/2}2h\left(\frac{N+1}{2}-n\right)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

上式显示一个线性相位 $\theta(\omega)=-(N/2)\omega$ 和一个常数群延迟 $=N/2$ 样本。

类型Ⅲ。系数反对称［即，$h(n)=-h(N-n)$］，阶数 N 为偶数。

例 5.3

我们考虑一个Ⅲ型 FIR 滤波器例子，阶数 $N=6$，如图 5.1c 所示，我们有 $h(0)=-h(6)$，$h(1)=-h(5)$，$h(2)=-h(4)$，我们必须有 $h(3)=0$ 以维持本例的反对称性：

$$H(z^{-1})=h(0)(1-z^{-6})+h(1)(z^{-1}-z^{-5})+h(2)(z^{-2}-z^{-4}) \tag{5.13}$$

$$=z^{-3}h(0)(z^{3}-z^{-3})+h(1)(z^{2}-z^{-2})+h(2)(z-z^{-1}) \tag{5.14}$$

现在，如果让 $z=e^{j\omega}$，且 $e^{j\omega}-e^{-j\omega}=2j\sin(\omega)=2e^{j(\pi/2)}\sin(\omega)$，得到滤波器的频率响应

$$H(e^{-j\omega})=e^{-j3\omega}[h(0)2j\sin(3\omega)+h(1)2j\sin(2\omega)+h(2)2j\sin(\omega)] \tag{5.15}$$

$$= e^{-j3\omega}e^{j(\pi/2)}[2h(0)\sin(3\omega)+2h(1)\sin(2\omega)+2h(2)\sin(\omega)] \tag{5.16}$$

$$= e^{-j[3\omega-(\pi/2)]}H_R(\omega) \tag{5.17}$$

注意，这个滤波器的相角是 $\theta(\omega) = -3\omega + \pi/2$，这仍然是 ω 的一个线性函数。滤波器群延迟 $\tau = 3$ 个样本。

在一般情况下，表示如下

$$H(e^{-j\omega}) = e^{-j[(N\omega-\pi)/2]}\left[2\sum_{n=1}^{(N)/2}h\left(\frac{N}{2}-n\right)\sin(n\omega)\right] \tag{5.18}$$

它有一个线性相位 $\theta(\omega) = -[(N\omega-\pi)/2]$ 和群延迟 $\tau = N/2$ 样本。

类型Ⅳ。系数反对称［即 $h(n) = -h(N-n)$］，阶数 N 为奇数。

例 5.4

考虑一个Ⅳ型滤波器例子，$N=7$，如图 5.1d 所示，$h(0) = -h(7)$，$h(1) = -h(6)$，$h(2) = -h(5)$，$h(3) = -h(4)$。其传递函数如下

$$\begin{aligned}H(z^{-1}) &= h(0)(1-z^{-7})+h(1)(z^{-1}-z^{-6})+h(2)(z^{-2}-z^{-5})\\&\quad+h(3)(z^{-3}-z^{-4})\end{aligned} \tag{5.19}$$

得到频率响应如下

$$\begin{aligned}H(e^{-j\omega}) &= e^{-j3.5\omega}[h(0)(e^{j3.5\omega}-e^{-j3.5\omega})+h(1)(e^{j2.5\omega}-e^{-j2.5\omega})\\&\quad+h(2)(e^{j1.5\omega}-e^{-j1.5\omega})+h(3)[(e^{j0.5\omega}-e^{-j0.5\omega})]\\&= e^{-j3.5\omega}[h(0)2j\sin(3.5\omega)+h(1)2j\sin(2.5\omega)+h(2)2j\sin(1.5\omega)\\&\quad+h(3)2j\sin(0.5\omega)]\\&= e^{-j[3.5\omega-(\pi/2)]}[2h(0)\sin(3.5\omega)+2h(1)\sin(2.5\omega)+2h(2)\sin(1.5\omega)\\&\quad+2h(3)\sin(0.5\omega)]\end{aligned} \tag{5.20}$$

这种 $N=7$ 的Ⅳ型滤滤器有一个线性相位 $\theta(\omega) = -3.5\omega + \pi/2$ 和一个常数群延迟 $\tau = 3.5$ 样本。

此Ⅳ型线性相位滤波器的传递函数通用表达式如下

$$H(e^{-j\omega}) = e^{-j[(N\omega-\pi)/2]}\left\{2\sum_{n=1}^{(N+1)/2}h\left(\frac{N+1}{2}-n\right)\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\} \tag{5.21}$$

4 种类型 FIR 滤波器频率响应总结如下：

$$H(e^{-j\omega}) = e^{-j[(N/2)\omega]}\left[h\left(\frac{N}{2}\right)+2\sum_{n=1}^{N/2}h\left(\frac{N}{2}-n\right)\cos(n\omega)\right] \quad \text{Ⅰ型}$$

$$H(e^{-j\omega}) = e^{-j[(\frac{N}{2})\omega]}\left\{2\sum_{n=1}^{(N+1)/2}h\left(\frac{N+1}{2}-n\right)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\} \quad \text{Ⅱ型}$$

$$H(e^{-j\omega}) = e^{-j[(N\omega-\pi)/2]}\left[2\sum_{n=1}^{(N)/2}h\left(\frac{N}{2}-n\right)\sin(n\omega)\right] \quad \text{Ⅲ型}$$

$$H(e^{-j\omega}) = e^{-j[(N\omega-\pi)/2]}\left\{2\sum_{n=1}^{(N+1)/2}h\left(\frac{N+1}{2}-n\right)\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\} \quad \text{Ⅳ型}$$

(5.22)

5.2.1 线性相位 FIR 滤波器的特性

上面讨论的 4 种类型的滤波器表明，FIR 对称或反对称系数滤波器提供线性相位（或常数群延迟）；这些系数是单位冲激响应样本。如上所示，对称或反对称系数滤波器具有线性相位，因此有一个恒定的群延迟。反之，有恒定群延迟的 FIR 滤波器系数一定对称或反对称，已被理论证明[4]。这些性质在设计和应用 FIR 滤波器时很有用。欲看到这 4 种类型滤波器另外一些性质，我们评估了线性相位典型 FIR 滤波器的幅度响应，如图 5.2 所示。

关于对这些典型幅度响应的观察对在滤波器设计早期阶段做出正确选择非常有用，这将在稍后解释。

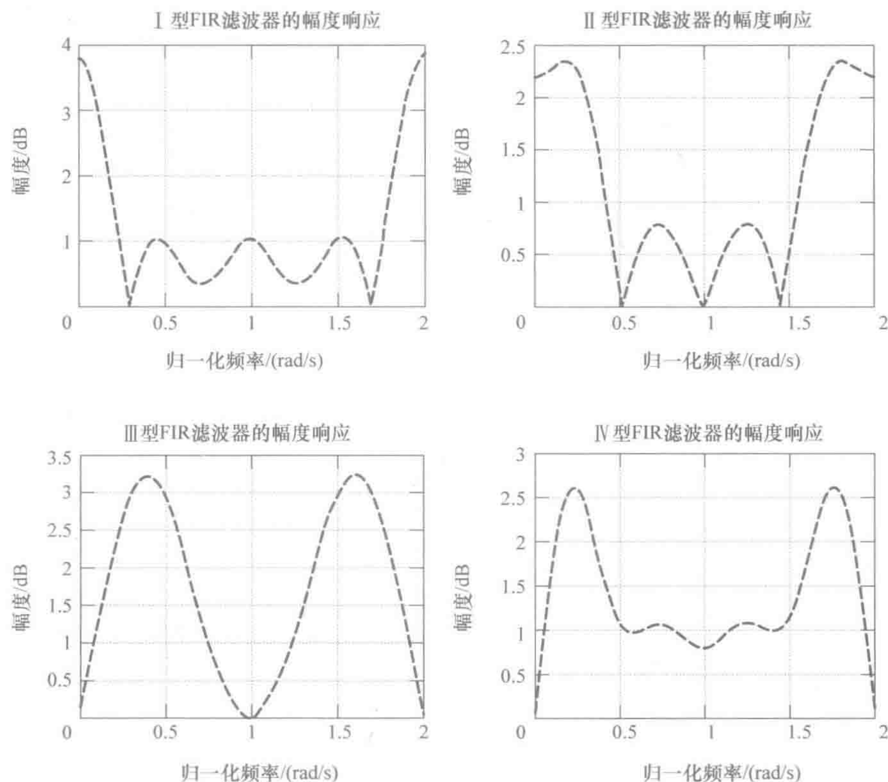


图 5.2　4 种典型线性相位 FIR 滤波器的幅度响应

例如，Ⅰ型滤波器在 $\omega=0$ 处有非零幅度，而且在归一化频率 $\omega/\pi=1$（对应于奈奎斯特频率）处也有非零值，而Ⅱ型滤波器在 $\omega=0$ 处有非零值，但在奈奎斯特频率处有零值。所以很明显，这些滤波器不适合设计带通和高通滤波器，

而它们都是适合低通滤波器的。Ⅲ型滤波器在 $\omega=0$ 处有零幅度，也在 $\omega/\pi=1$ 处为零，所以它们适合设计带通滤波器，但不适合设计低通滤波器和带阻滤波器。Ⅳ型滤波器在 $\omega=0$ 处有零幅度，在 $\omega/\pi=1$ 处非零，它们不适合设计低通滤波器和带阻滤波器，但可作为带通和高通滤波器的候选。

在图 5.3a 中，Ⅰ型滤波器的相位响应显示是线性关系。当传递函数在 z 平面单位圆上有零点时，其相位响应在相应的频率处显示有一个 π 弧度跳跃间断，绘图时，每当相位响应超过 $\pm\pi$ 使用 2π 不连续跳变，使相位的整体仍然保持在 $\pm\pi$ 范围。如果没有 π 弧度跳变不连续，也就是说，如果在单位圆上没有零点，在展开时，相位响应成为 ω 的一个连续函数。

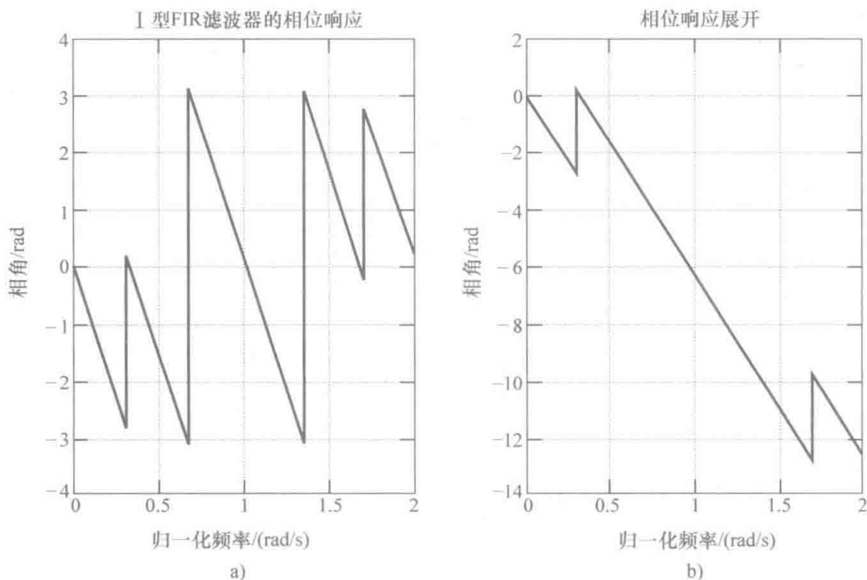


图 5.3 Ⅰ型 FIR 滤波器线性相位响应

相位展开的结果（见图 5.3a）是在相位响应中移除跳变的不连续性，使相位响应位于 $\pm\pi$ 内（见图 5.3 b）。如果滤波器阶数 N 是偶数，它的群延迟是采样样本的整数倍数（等于 $N/2$）个样本。如果 N 是奇数，那么群延迟等于样本（一个整数加上一半）。在开始设计线性相位滤波器之前，我们将使用所有这些性质。

线性相位滤波器在 z 平面也有一些有趣的性质。正像例子中看到那样，它们的传递函数总是包含成对项 $(z^n \pm z^{-n})$。我们写对称系数 FIR 滤波器传递函数 $H(z)$ 如下：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N} h(N-n)z^{-n} \tag{5.23}$$

通过改变变量 $m=(N-n)$，简化级数 $\sum_{n=0}^{N} h(N-n)z^{-n}$ 为

$$\sum_{m=0}^{N} h(m) z^{-N+m} = z^{-N} \sum_{m=0}^{N} h(m) z^{m} = z^{-N} H(z^{-1}) \tag{5.24}$$

所以有以下结果:

$$H(z) = z^{-N} H(z^{-1}) \tag{5.25}$$

同样，反对称系数滤波器满足下列性质

$$H(z) = -z^{-N} H(z^{-1}) \tag{5.26}$$

满足式（5.25）的多项式 $H(z)$ 称为镜像多项式，而满足式（5.26）的多项式称为反镜像多项式。我们看到一个有对称系数的多项式 $H(z)$ 是一个镜像多项式，而有反对称系数的对应一个反镜像多项式。反之亦然，也可以证明，即一个镜像多项式有对称系数，反镜像多项式有反对称系数。

从式（5.25）和式（5.26）中很容易注意到，在镜像多项式及反镜像多项式中，如果 $z = z_1$ 是 $H(z)$ 的一个零点，那么 $1/z$ 也是 $H(z)$ 一个零点。如果零点 z_1 是一个复数 $r_1 e^{j\phi}$；$|r|<1$，那么 $z_1{}^* = r_1 e^{-j\phi}$ 也是一个零点。它们的倒数（$1/r_1$）$e^{-j\phi}$ 和（$1/r_1$）$e^{j\phi}$ 也是 $H(z)$ 的零点，它位于单位圆 $|z|=1$ 外。因此镜像多项式和反镜像多项式复零点按象限对称出现，如图 5.4 所示。如果在单位圆（如在 $z_0 = e^{j\phi}$）上有一个零点，其倒数 $z^{-1} = e^{-j\phi}$ 已经位于单位圆上，和 z_0 复共轭一样，因此在单位圆上零点没有象限对称。显然在实轴上零点 $z_r = r$ 在单位圆内与单位圆外 $z_r^{-1} = 1/r$ 成对。

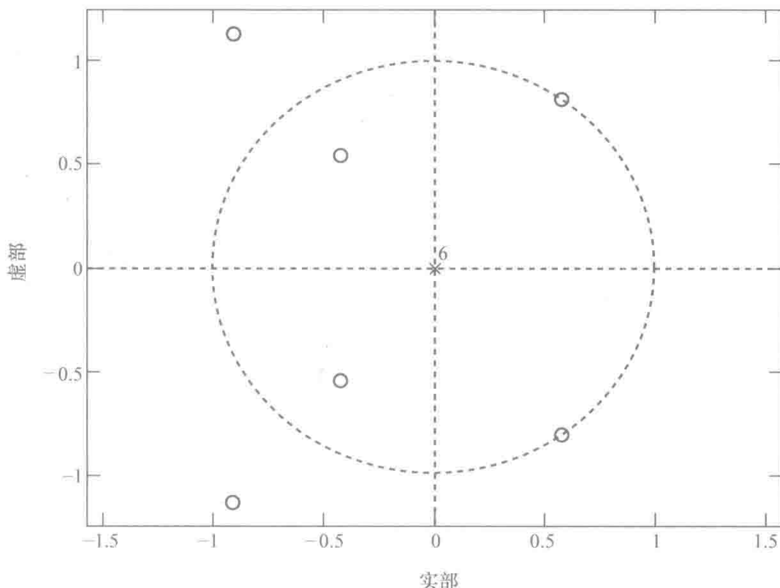


图 5.4　一个镜像多项式的零点和极点位置

例 5.5

考虑一个Ⅰ型 FIR 滤波器 $H(z^{-1})=0.4+0.6z^{-1}+0.8z^{-2}+0.2z^{-3}+0.8z^{-4}+0.6z^{-5}+0.4z^{-6}$的例子，来说明这些特性。当它表达成形式 $H(z)=z^{-6}(0.4+0.6z+0.8z^2+0.2z^3+0.8z^4+0.6z^5+0.4z^6)$时，分解因式得到

$$H(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_1^*)(z-z^{-1})(z-z^{-1*})(z-z_2)(z-z_2^*)}{z^6} \tag{5.27}$$

这里 $z_1=0.69\mathrm{e}^{\mathrm{j}128.6°}$，$z_1^*=0.69\mathrm{e}^{-\mathrm{j}128.6°}$，$z_1{}^{-1}=1.45\mathrm{e}^{-\mathrm{j}128.6°}$，$z_1{}^{-1*}=1.45\mathrm{e}^{\mathrm{j}128.6°}$，$z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{j}54.12°}$，$z_2^*=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}54.12°}$，它们被绘于图 5.4 中，在 $z=0$ 处 $H(z)$ 伴随有 6 个极点。z_2 和 z_2^* 两个零点在单位圆上，其他 4 个零点关于象限对称。这种Ⅰ型滤波器的幅度显示如图 5.2a 所示，它显示在单位圆上两个零点 z_2 和 z_2^* 对应频率的幅度值为零。在图 5.3 中，这两个频率处的相位响应显示了不连续性。

这 4 种 FIR 类型滤波器的其他一些特性在下面列出：

1）Ⅰ型 FIR 滤波器在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处要么有偶数个零点要么没有零点。

2）Ⅱ型 FIR 滤波器在 $z=1$ 处有要么有偶数个零点或没有零点，在 $z=-1$ 处有奇数个零点。

3）Ⅲ型 FIR 滤波器在 $z=1$ 和 $z=-1$ 处有奇数个零点。

4）Ⅳ型 FIR 滤波器在 $z=1$ 处有奇数个零点，在 $z=-1$ 处有偶数个或奇数个零点。

这些性质确定的滤波器幅度响应特性如图 5.2 所示。在 $z=1$ 处零点对应于 $\omega=0$，$z=-1$ 处零点对应于 $\omega=\pi$。作为一个例子，我们注意到Ⅲ型 FIR 滤波器在$\omega=0$ 和 $\omega=1$ 处幅度为零，而我们上面提到的Ⅲ型 FIR 滤波器传递函数在$z=1$ 和 $z=-1$ 有奇数个零点。

另一个将用于设计 FIR 滤波器的傅里叶级数法的重要结果如下给出。这对所有的 FIR 和 IIR 滤波器都适用，而不仅仅是线性相位滤波器。任何离散时间序列 $x(n)$的傅里叶变换（DTFT）为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \tag{5.28}$$

由于 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是一个 2π 为周期的周期函数，其傅里叶级数表示形式如下

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega} \tag{5.29}$$

这里

$$c(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{d}\omega \tag{5.30}$$

比较式（5.28）和式（5.29），我们看到 $x(n)=c(n)$，$-\infty<n<\infty$。当考

虑 LTI－DT 系统的频率响应 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} h(n)e^{-jn\omega}$ 时，对于 $n<0$，$h(n)=0$，我们会发现，对于 $n<0$，$c(n)=0$。所以注意，从式（5.30）得出的傅里叶级数系数 $c(n)$ 与 IIR 或 FIR 滤波器 $h(n)$ 的系数相同。当我们选择 $H(e^{j\omega})$ 在 $[-\pi, \pi]$ 积分区间子间隔内是一个常数且拥有零相位，或 $H(e^{j\omega})$ 在 $[-\pi, \pi]$ 区间内不连续的通带和阻带区间内分段恒定时，通过方程式（5.30）积分估算 $c(n)=h(n)$ 系数是很容易的。这个结果满足理想低通、高通、带通与带阻滤波器的幅度响应的逼近设计[㊀]。基于上述 FIR 滤波器特性的傅里叶级数方法将在下面讨论。

5.3　窗改进傅里叶级数法

4 个理想经典类型数字滤波器的幅度响应如图 5.5 所示。让我们考虑理想要求的低通滤波器 $H_{LP}(e^{j\omega})$ 的幅度响应，其截止频率为 ω_c。当 $|\omega|<\omega_c$ 时幅度恒为 1，具有零相位。从式（5.30），我们得到

$$\begin{aligned} c_{LP}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{jn\omega}}{jn}\right)\Bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{e^{j\omega_c}-e^{-j\omega_c}}{2j(\pi n)} \\ &= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad -\infty < n < \infty \end{aligned} \tag{5.31}$$

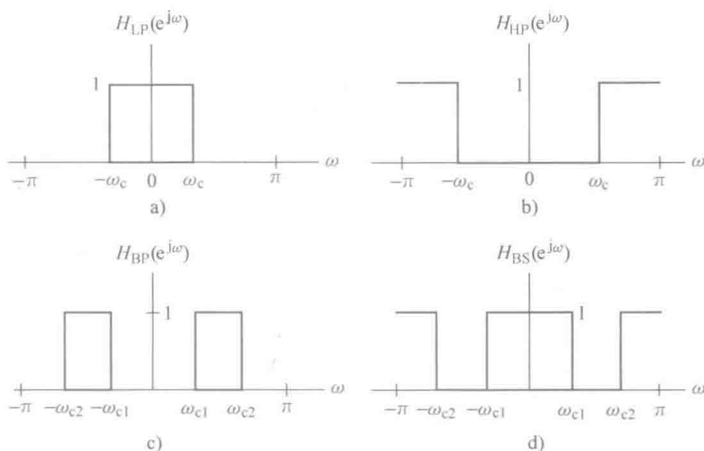


图 5.5　4 个理想滤波器的频率响应

㊀ 已经导出傅里叶级数系统的两种其他类型的频率响应是希尔伯特变换器和微分器的频率响应。对它们感兴趣的学生可以参考其他教科书。

傅里叶级数系数的另一种形式

$$c_{\mathrm{LP}}(n)=\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}=\left(\frac{\omega_c}{\pi}\right)\mathrm{sinc}(\omega_c n);\qquad -\infty<n<\infty \tag{5.32}$$

请注意，当 $n=0$ 时，$\mathrm{sinc}(\omega_c n)=1$，所以我们找出系数的另一种方式

$$c_{\mathrm{LP}}(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}; & n=0\\ \dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}; & |n|>0\end{cases} \tag{5.33}$$

理想 HP、BP 和 BS 滤波器响应的傅里叶级数系数可类似得出，如图 5.5b-d 所示：

$$c_{\mathrm{HP}}(n)=\begin{cases}1-\dfrac{\omega_c}{\pi}; & n=0\\ -\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}; & |n|>0\end{cases} \tag{5.34}$$

$$c_{\mathrm{BP}}(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_{c2}-\omega_{c1}}{\pi}; & n=0\\ \dfrac{1}{\pi n}[\sin(\omega_{c2}n)-\sin(\omega_{c1}n)]; & |n|>0\end{cases} \tag{5.35}$$

$$c_{\mathrm{BS}}(n)=\begin{cases}1-\dfrac{(\omega_{c2}-\omega_{c1})}{\pi}; & n=0\\ \dfrac{1}{\pi n}[\sin(\omega_{c1}n)-\sin(\omega_{c2}n)]; & |n|>0\end{cases} \tag{5.36}$$

继续低通滤波器的设计，选择有限级数 $\sum_{n=-M}^{n=M}c_{\mathrm{LP}}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}=H_{\mathrm{M}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，其包含（$2M+1$）个系数，从 $-M\sim M$，作为无限级数 $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_{\mathrm{LP}}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}$ 的一个近似。换句话说，我们用包含有限系数的 H_{M}（$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$）逼近包含无限系数正好匹配 $H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的理想频域响应。随着 M 的增加，$H_{\mathrm{M}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 有限级数在最小均方意义上逼近理想响应 $H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，也就是说，误差定义为

$$\begin{aligned}J(c,\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_{\mathrm{M}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})-H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=-M}^{n=M}\left[\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}-H_{\mathrm{LP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{5.37}$$

除不连续点外，其在所有频率处均有一个最小值。

我们可以通过选择尽可能大的 M 值达到我们喜欢的小误差。随着 M 的增加，通带（和阻带）波纹的数量增加而通频带（$0\leqslant\omega\leqslant\omega_c$）和阻带（$\omega_c\leqslant\omega\leqslant\pi$）之间最大误差发生频率间的宽度减小。换句话说，随着 M 增加，最大理想值偏

离值减少，但不连续点附近除外，尽管我们选择大的 M 值！那里的误差保持不变。理想通带值或阻带值的最大偏差或超调量是理想通带归一化值和图 5.6 所示阻带值之间差别的 11%。图 5.6 绘制了两种 M 值的幅度响应 $|H_M(e^{j\omega})|$，这里 $H_{id}(e^{j\omega})$ 是理想低通滤波器的幅度响应，如图 5.5a 所示。

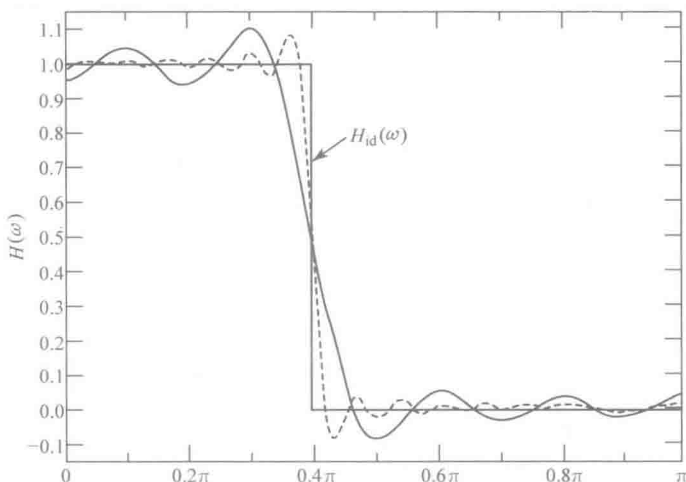


图 5.6　有吉布斯超调量的低通滤波器的频率响应

5.3.1　吉布斯现象

这些特性被称为“吉布斯现象”，由吉布斯数学推导得出。我们定性解释它如下。有限序列 $c(n)(-M \leqslant n \leqslant M)$ 可以视为无限序列 $c(n)(-\infty \leqslant n \leqslant \infty)$ 乘以一个有限窗函数的结果，窗函数如下

$$w_R(n) = \begin{cases} 1; & -M \leqslant n \leqslant M \\ 0; & |n| \geqslant M \end{cases} \tag{5.38}$$

$$\Psi(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{n=M} e^{-jn\omega} = \frac{\sin[(2M+1)\omega/2]}{\sin(\omega/2)} \tag{5.39}$$

所以有乘积 $h_w(n) = c(n) \cdot w_R(n)$，它是有限长度的，如图 5.7c 所示。

因此这两个函数积的频率响应从 $\Psi(e^{j\omega})$ 与理想要求的频率响应 $H_{LP}(e^{j\omega})$ 的卷积得到。

$$H_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{LP}(e^{j\varphi})\Psi[e^{j(\omega-\varphi)}]d\varphi \tag{5.40}$$

$\Psi(e^{j\omega})$ 主瓣，集中在 $\omega=0$ 处，定义为两个边带第一零点与 $\omega=0$ 之间的宽度，发生在 $(2M+1)\omega/2 = \pm\pi$ 时，也就是说，当 $\omega = 2\pi(2M+1)$ 时，使主瓣的

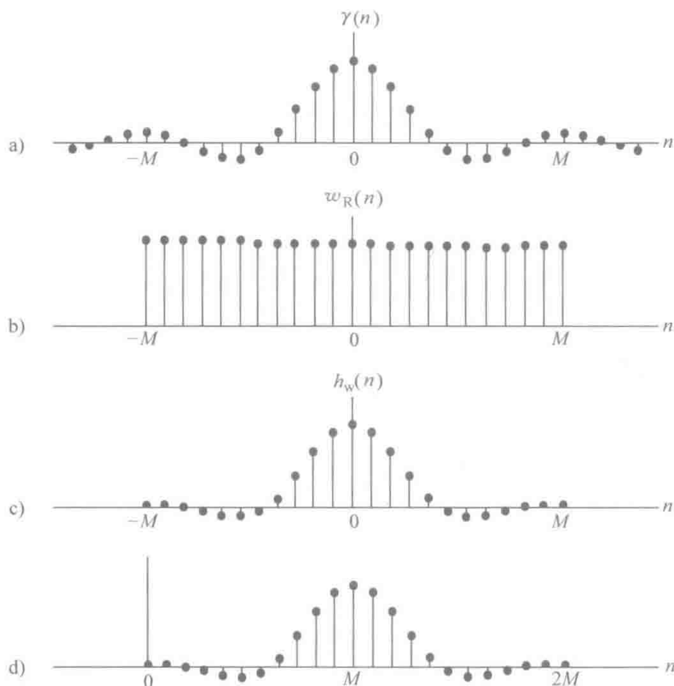


图 5.7 经矩形窗修改的 FIR 滤波器系数

宽度达到 $4\pi/(2M+1)$。随着 M 增加，主瓣和旁瓣的宽度减少，引起在同一频带更多的旁瓣或波纹。同时，主瓣和旁瓣峰值振幅增加以每个瓣下的面积保持不变。$\Psi(e^{j\omega})$ 的这些特性直接反映 $H_M(e^{j\omega})$ 与 $H_{LP}(e^{j\varphi})$ 的卷积行为。$H_{LP}(e^{j\omega})$ 与 $\Psi(e^{j\omega})$的卷积效果可以通过观察图 5.8 所示的 4 个不同 ω 值时，$H_{LP}(e^{j\omega})\Psi[e^{j(\omega-\varphi)}]$ 乘积积分的交叠间隔来说明。很明显，如果主瓣的宽度很窄，$H_M(e^{j\omega})$在$\omega=\omega_c$处急剧下降。如果 $\Psi(e^{j\omega})$旁瓣或峰值数量增加，$H_M(e^{j\omega})$的波纹数量和最大误差也将增加。

5.3.2 窗口函数的使用

为了减少吉布斯现象的影响，一些研究人员提出使用锥形窗[11,12]；还有许多人提出了其他类型的窗口函数。下面给出几个比较流行的窗函数。注意，窗函数生成系数的数量如下给出，是 $2M+1=N+1$：

- 巴特利特 Bartlett 窗㊀

㊀ 在许多教科书中，Bartlett 窗口也被称为三角窗口，但在 MATLAB 中，Bartlett 窗口与三角形窗口不同。

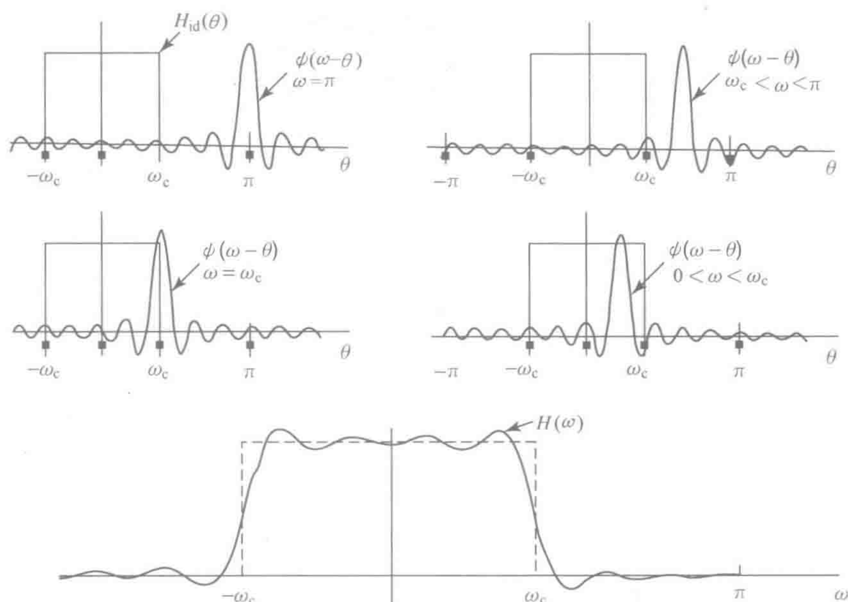


图 5.8　矩形窗与理想滤波器频率响应的卷积

$$w(n)=1-\frac{|n|}{M+1};\ -M\leqslant n\leqslant M$$

- 汉宁（Hann）窗：

$$w(n)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right)\right];\ -M\leqslant n\leqslant M$$

- 汉明（Hamming）窗：

$$w(n)=0.54+0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right);\ -M\leqslant n\leqslant M$$

- 布莱克曼（Blackman）窗：

$$w(n)=0.42+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{2M+1}\right);\ -M\leqslant n\leqslant M$$

上面列出窗函数的频率响应有不同的主瓣宽度 $\Delta\omega_M$ 与不同的旁瓣峰值。在图 5.9 所示的 H_M（$e^{j\omega}$）特性中，可以看到，在 H_M（$e^{j\omega}$）峰值误差发生的两个频率差距用 $\Delta\omega_M$ 表示。当窗函数的频率响应与所需低通滤波器频率响应卷积时，滤波器的过渡带宽由选择窗的主瓣宽度决定，因此滤波器过渡带宽会因不同窗函数的改动而不同。相对旁瓣水平 A_{s1} 定义为选择的窗函数主瓣与最大旁瓣幅度的分贝差。它决定着滤波器阻带的最大衰减 $A_s=-20\lg\delta$。

在图 5.9 中，我们还展示了过渡带宽 $\Delta\omega$ 和中心频率 $\omega_c=(\omega_p+\omega_s)/2$，$\omega_p$ 和 ω_s 分别是通带和阻带的截止频率。波纹 δ 的值并不取决于滤波器的长度

$(2M+1)$ 和滤波器的截止频率 ω_c。几个备选窗函数主瓣 $\Delta\omega_M$ 宽度，过渡带宽 $\Delta\omega$ 以及相对旁瓣旁瓣衰减在表 5.1 列出，最后一列是通过低通滤波器使用相应窗函数实现的最小衰减 $A_s = -20\lg\delta$。应该指出，表 5.1 中数值是通过仿真 I 型 FIR 滤波器在 $\omega_c = 0.4\pi$ 和 $M = 128$[1] 条件下的性能得到的，如果是其他滤波器，ω_c 和 M 选择其他值，它们将会变化。从表 5.1 看到，随着 A_s 增加，M 恒定，过渡带宽 $\Delta\omega$ 也增加。因为我们喜欢很大的 A_s 值和小的 $\Delta\omega$ 值，所以我们必须进行折中。窗函数和 M 值的选择是我们控制过渡带宽 $\Delta\omega$ 所拥有的两个自由度，但是最小阻带衰减 A_s 只取决于我们选择的窗函数，而不是 M 值大小。

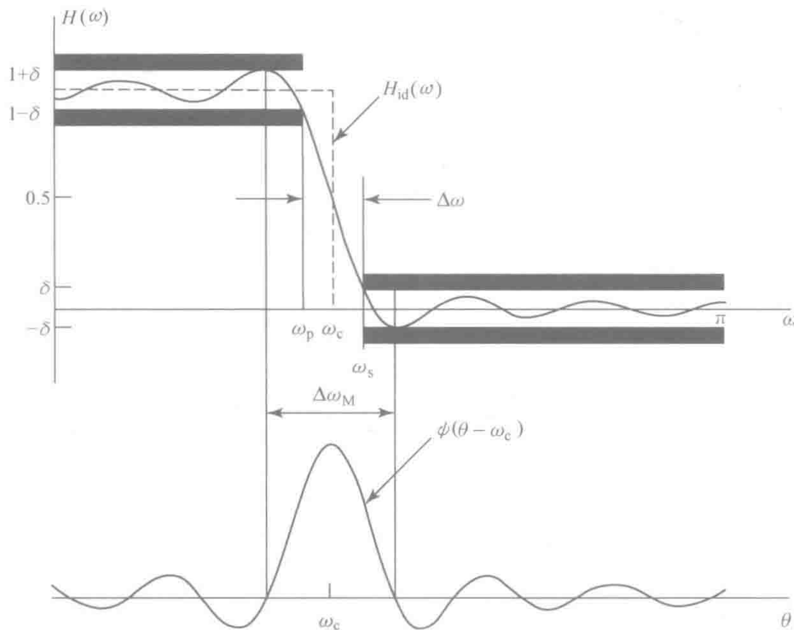


图 5.9 理想滤波器和最终设计的频率响应

两个提供控制 δ_s（这里 A_s）和过渡带宽 $\Delta\omega$ 的窗口函数是道尔夫－切比雪夫窗函数[6]和凯撒窗函数[7]，分别有各自的参数 r 和 β。凯撒窗函数定义如下

$$w(n) = \frac{I_0\{\beta\sqrt{1-(n/M)^2}\}}{I_0\{\beta\}};\ -M \leqslant n \leqslant M \tag{5.41}$$

表 5.1 常用窗口的一些性质

窗口类型	$\Delta\omega_M$	$\Delta\omega$	A_{sl}/dB	A_s/dB
矩形	$4\pi/(2M+1)$	$0.92\pi/M$	13	20.9
巴特利特	$4\pi/(2M+1)$	—①	26.5	—①
汉宁	$8\pi/(2M+1)$	$3.11\pi/M$	31.5	43.9
汉明	$8\pi/(2M+1)$	$3.32\pi/M$	42.7	54.5
布莱克曼	$12\pi/(2M+1)$	$5.56\pi/M$	58.1	75.3

① 巴特利特窗频率响应单调递减，因此没有旁瓣。所以此窗不出现过渡带宽和旁瓣衰减。

这里 $I_0\{\bullet\}$ 是修正零阶贝塞尔函数。它是一个幂级数形式

$$I_0\{x\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^k}{k!}\right]^2 \tag{5.42}$$

我们用以下三个步骤计算 Kaiser 窗函数值：

• 在阻带实现衰减 $\alpha_s = -20\lg\delta$ 所需参数 β 由 Kaiser 从以下经验公式得到（通带波纹几乎与 δ_s 一样）：

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_s - 8.7) & \alpha_s > 50 \\ 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21) & 21 \leqslant \alpha_s \leqslant 50 \\ 0 & \alpha_s < 21 \end{cases} \tag{5.43}$$

• 紧接着，滤波器阶数 $N\ (=2M)$ 由 Kaiser 从另一个经验公式估计：

$$N = \frac{(\alpha_s - 8)}{2.285(\Delta\omega)} \tag{5.44}$$

这里 $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ 为过渡带宽，如图 5.9 所示。

• 第三步是计算 $I_0\{x\}$。在实践中，增加有限项数，就是说，无限级数的 20 项就能达到 $I_0\{x\}$ 的充分精度值。分子中的参数 x 代表式（5.41）中的 $\beta\sqrt{1-(n/M)^2}$，因此 x 的值随 n 变化取不同的值。

5.3.3 FIR 滤波器设计过程

线性 FIR 滤波器设计过程中讨论的步骤总结如下：

1）基于幅度响应的本质，我们选择一个值 M，使用式（5.31）、式（5.34）、式（5.35）或式（5.36）来计算系数的值 $C_{LP}(n)$、$C_{HP}(n)$、$C_{BP}(n)$ 或 $C_{BS}(n)$，其中，$-M \leqslant n \leqslant M$。然后选择一个窗口函数（Batlett、Hamming、Hann、Kaiser 或其他窗口），计算对于 $-M \leqslant n \leqslant M$ 的值 $w(n)$。在 Kaiser 窗口情况下，我们从式（5.44）发现 $M = N/2$ 的值，而它已经得到其他一些经验公式来估算 N 的值，使用其他窗函数来设计 FIR 滤波器[㊀]。注意，我们必须选择比从

㊀ Kaiser 给出的公式可能不会对 FIR 滤波器的所有情况给出鲁棒性估计。更可靠的估计由下面的经验公式[10]给出，该公式在 MATLAB 函数 remezord 中使用：

$$N \cong \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s) - F(\delta_p, \delta_s)\left(\dfrac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}\right)^2}{\left(\dfrac{\omega_s - \omega_p}{2\pi}\right)}$$

其中 $D_\infty(\delta_p, \delta_s)$（当 $\delta_p \geqslant \delta_s$ 时）$= [a_1(\lg\delta_p)^2 + a_2(\lg\delta_p) + a_3]\lg\delta_s - [a_4\lg\delta_p]^2 + a_5(\lg\delta_p) + a_6]$，$F(\delta_p, \delta_s) = b_1 + b_2(\lg\delta_p - \lg\delta_s)$，其中 $a_1 = 0.005309$，$a_2 = 0.07114$，$a_3 = -0.4761$，$a_4 = 0.00266$，$a_5 = 0.5941$，$a_6 = 0.4278$，$b_1 = 11.01217$，$b_2 = 0.51244$。当 $\delta_p < \delta_s$ 时，在上述 $D_\infty(\delta_p, \delta_s)$ 表达式中，互换其位置。

式（5.44）计算值更大的最小偶整数 N，因为 Kaiser 窗仅用于 I 型滤波器设计。

2）然后将系数 $c(n)$ 和 $w(n)$ 相乘得到 $h_{w}(n)$ 的值。这些有限数量系数滤波器频率响应为 $H_{w}(e^{j\omega}) = h_{w}(-M)e^{j\omega M} + h_{w}(-M+1)e^{j(-M+1)\omega} + \cdots + h_{w}(1)e^{j\omega} + h_{w}(0) + h_{w}(1)e^{-j\omega} + \cdots + h_{w}(M)e^{-jM\omega}$。

3）下一步是将系数 $h_{w}(e^{j\omega})$ 乘以 $e^{-jM\omega}$，相当于延迟系数 M 个样本得到 $h(n)$［即 $(h_{w}(n-M) = h(n)$］。通过延迟 $c(n)$ 和 $w(n)$ 的乘积 M 个样本，我们获得了 $N+1$ 有限长度系数 $h(n)$ 的因果滤波器，$0 \leqslant n \leqslant N$。

考虑图 5.7（使用一个矩形窗口）过程变得好理解一点。因为 H_{w}（$e^{j\omega}$）是一个 ω 实函数，它乘以 $e^{-jM\omega}$ 的幅度不会改变。现在有一个 FIR 滤波器 $H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{N} h(n)z^{-n}$，这是一个长度为（$N+1$）的因果滤波器而且幅度等于 $|H_{w}(e^{j\omega})|$。其相位响应是 $-M\omega$，当 H_{w}（$e^{j\omega}$）达到一个负值时，附加 π 弧度角。它的群延迟是一个常数，等于 M 样本。这就完成了设计一个 FIR 滤波器的通用过程，逼近一个低通滤波器的理想幅度响应；类似的过程用于设计高通、带通和带阻滤波器。让我们由两个简单的例子说明这个过程。

例 5.6

设计一个带通滤波器，逼近图 5.5c 给出的理想幅度响应，其中 $\omega_{c2} = 0.6\pi$ 和 $\omega_{c1} = 0.2\pi$。让我们选择一个长度为 $N = 11$ 的汉明窗而且绘出滤波器的幅度响应。

从式（5.35）计算得到给定幅度响应傅里叶级数系数 $c_{BP}(n)$：

$$c_{BP}(n) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}; & n = 0 \\ \dfrac{\sin(\omega_{c2} n)}{\pi n} - \dfrac{\sin(\omega_{c1} n)}{\pi n}; & |n| \geqslant 0 \end{cases}$$

但由于汉明窗函数长度为 11，我们也需要计算系数 $c_{BP}(n)$，n 仅从 $-5 \sim 5$。所以我们也计算汉明窗的 11 个系数，使用公式

$$w_{H}(n) = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right); -5 \leqslant n \leqslant 5$$

它们的积 $h_{w}(n) = c_{BP}(n)w_{H}(n)$ 在下一步计算。当 $-5 \leqslant n \leqslant 5$ 时，11 个系数 $c_{BP}(n)$、$w_{H}(n)$ 和 $h_{w}(n)$ 列出如下。接下来，系数 $h_{w}(n)$ 延迟了 5 个样本得到 FIR 滤波器函数［即，$h(n) = h_{w}(n-5)$］，$0 \leqslant n \leqslant 10$，这些系数如下给出。FIR 滤波器的 4 个序列和幅度响应分别如图 5.10 和图 5.11 所示。

$c_{BP}(n) = 0.00 \quad 0.0289 \quad -0.1633 \quad -0.2449 \quad 0.1156 \quad 0.400 \quad 0.1156$
$\quad -0.2449 \quad -0.1633 \; 0.0289 \quad 0.000$

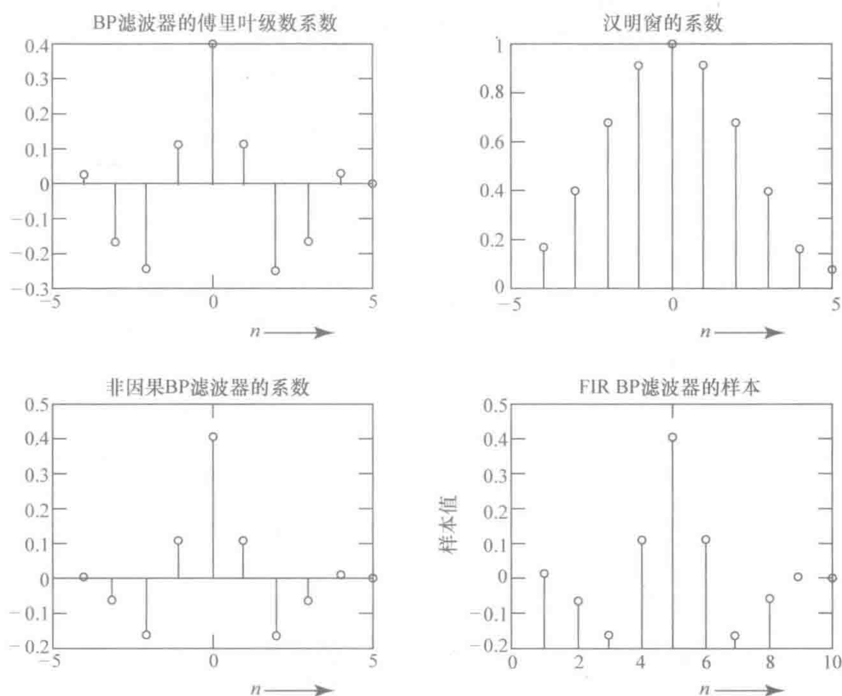


图 5.10　设计过程中得到的滤波器系数

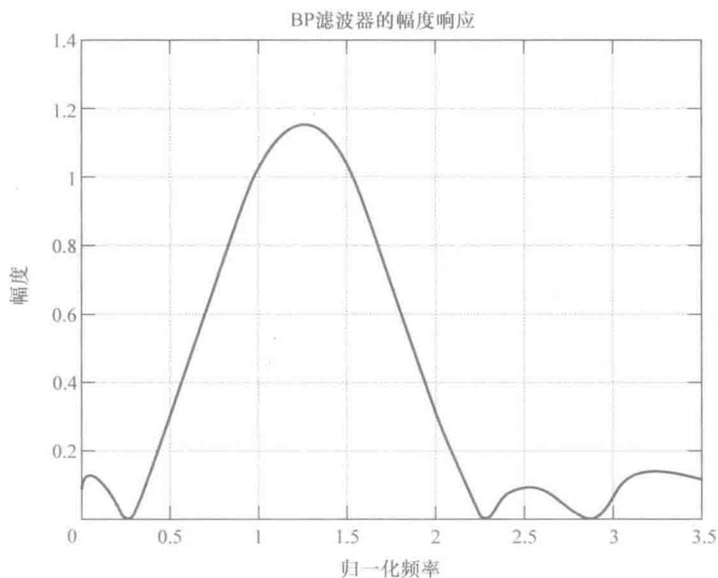


图 5.11　带通滤波器的频率响应

$w_H(n)=0.08\quad 0.1679\quad 0.0379\quad 0.6821\quad 0.9121\quad 1.0\quad 0.9121$
$\quad 0.6821\quad 0.0379\quad 0.1679\quad 0.0800$

$h_w(n)=0.00\quad 0.0049\quad -0.0650\quad -0.1671\quad 0.1055\quad 0.4000\quad 0.1055$
$\quad -0.1671\quad -0.0650\quad 0.0049\quad 0.000$

$h(n)$	0.0000 0.0049 −0.0650 −0.1671 0.1055 0.4000 0.1055 −0.1671 −0.0650 0.0049 0.0000

例 5.7

设计一个长度为 11，截止频率 $\omega_c=0.3\pi$ 的低通 FIR 滤波器。利用汉明窗，由 $H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{10}h(n)z^{-n}$ 找到 FIR 滤波器样本 $h(3)$ 和 $h(9)$ 的值。

由于数字滤波器的长度是 11，其阶数是 $N=10$。$-5\leqslant n\leqslant 5$ 时的系数 $h_w(n)$ 推迟了 5 个样本。

因为只有 $h(3)$ 和 $h(9)$ 要求，通过观察图 5.10，我们注意到，这些样本与 $h_w(-2)$ 和 $h_w(4)$ 一样，因为当它们被推移 5 个样本成为 $h(3)$ 和 $h(9)$。所以我们必须计算 $c_{LP}(-2)$、$c_{LP}(4)$ 及汉明窗的 $w(-2)$、$w(4)$ 的值。然后 $h_w(-2)=c_{LP}(-2)w(-2)$ 和 $h_w(4)=c_{LP}(4)w(4)$。

如果 FIR 滤波器的频率响应有多个幅度，那很容易扩展如图 5.12 所示的方法。设计一个低通滤波器，截止频率 ω_{c1} 和最大幅值为 0.8，另一个低通滤波器截止频率 ω_{c2}，通带最大幅值为 0.2；设计一个高通滤波器截止频率 ω_{c3} 和最大幅值为 0.5，另一个低通滤波器截止频率 ω_{c2}，通带最大幅值是 0.2；我们设计一个高通滤波器截止频率 ω_{c3}，通带最大幅值 0.5；另一个带通滤波器截止频率 ω_{c3} 和 ω_{c4}，最大幅值为 1.0。如果所有这些滤波器设计为零相位或相同的相位响应，那么上述 4 个过滤器的总和在不同通带上幅度水平近似。4 个过滤器应被设计成有非常低的旁瓣，这样它们将不会溢出到相邻滤波器通带过多。

甚至当我们设计一个通带或阻带上幅值恒定时的 FIR 滤波器时，使用上述方法在理想的通带和阻带之间将产生一个过渡带。不使用锥形窗缓解不连续点处的吉布斯超调量，我们可以修改理想的分段，用常数幅度响应去除不连续性。在通带和阻带之间我们选择阶数 $p\geqslant 0$ 的样条函数[5]。零阶样条函数是一条连接通带和阻带的直线，如图 5.12b 所示。其低通滤波器频率响应的傅里叶级数系数由下给出

$$h_{LP}(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}; & n=0\\ \dfrac{2\sin(\Delta\omega n/2)}{\Delta\omega n}\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}; & |n|>0\end{cases}\tag{5.45}$$

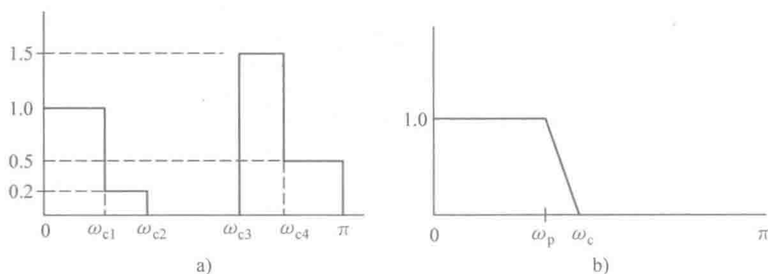


图　5.12

a）多级 FIR 滤波器的理想幅度响应　b）零阶样条函数低通滤波器的幅度响应

这里 $\Delta\omega=\omega_s-\omega_p$ 和 $\omega_c=[(\omega_s+\omega_p)/2]$。

当我们选择一个高阶样条函数（如，$p=2,3,4$），可以实现一个平滑过渡。在这种情况下，傅里叶级数系数由下给出

$$h_{LP}(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}; & n=0\\ \left(\dfrac{\sin(\Delta\omega)n/2p}{(\Delta\omega)n/2p}\right)^p\left(\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}\right); & |n|>0\end{cases}\tag{5.46}$$

使用这个公式的设计过程似乎比使用窗函数傅里叶级数方法更容易，因为不需要计算窗函数系数，及这些系数与理想频率响应的乘积。但它只适用于低通滤波器的设计。然而，大量的仿真这个设计过程表明，随着带宽 $\Delta\omega$ 减小和 p 的增加，滤波器的幅度响应在通带和阻带内呈现波动，并不比从加窗 FIR 滤波器得到的响应更好。

5.4　使用 MATLAB 设计加窗 FIR 滤波器

5.4.1　滤波器阶数估计

在讨论傅里叶级数方法中，指出我们只能选择一个窗函数（Barlett，Hamming，Hann 等），滤波器阶数 $N=2M$。没有选择窗口类型或 N 值指导；换句话说，基于一个测试和误差做任意选择，直到满足要求。但在 Kaiser 和 Dolph – Chebyshev 窗情况下，我们有一个经验公式来估计达到所需阻带衰减 α_s 的阶数 N。然而，早些时候有人指出，当上面提到的窗被选择时，有一些作者推导出经验公式能估算阶数 N。我们使用 MATLAB M – file kaiserord（在 MATLAB 信号处理工具箱得到）估计 Kaiser 窗的滤波器阶数 N。然而，我们将使用 M – file remezord 估计使用其他窗的滤波器阶数。得到滤波器阶数后，设计过程下一步是找到与

FIR 滤波器传递函数系数一致的滤波器单位冲激响应 $h(n)$ 的值。MATLAB M - file fir1 用于设计以上讨论的分段恒定滤波器，fir2 是用于设计任意幅度要求的滤波器的 M - file。在下面的例子中，注意，N 是滤波器阶数，因此有 $N+1$ 个系数，但 MATLAB 函数中 N 是系数数量，如使用 Hann 窗函数的计算函数 hamming。

例 5.8

如果 FIR 滤波器通带要求的幅度响应位于 $1+\delta_p$ 和 $1-\delta_p$ 之间，则在通带的最大衰减 α_p（dB）是 $20\lg(1+\delta_p)-20\lg(1-\delta_p)=20\lg[(1+\delta_p)/(1-\delta_p)]$。这种情况下求解 δ_p，得到

$$\delta_p=\frac{10^{0.05\alpha_p}-1}{10^{0.05\alpha_p}+1}$$

如果通带幅度介于 1 和（$1-\delta_p$）之间，则通带的最大衰减 $\alpha_p=-20\lg(1-\delta_p)$，在这种情况下，$\delta_p$ 等于（$1-10^{-0.05\alpha_p}$）。如果阻带幅度位于 δ_s 以下，阻带的最小衰减 $\alpha_s=-20\lg(\delta_s)$，从上得到 $\delta_s=10^{-0.05\alpha_s}$。如果通带和阻带的 α_p 和 α_s 单位为 dB 这些关系用来找到 δ_p 和 δ_s 值。

在 MATLAB 函数 [N, fpoints, magpoints, wt] = remezord (edgepoints, bandmag, dev, Fs) 中，输入向量 edgepoints 列出了 0 与奈奎斯特频率之间不连续的边沿，但不包括频率 $\omega=0$ 和奈奎斯特频率，奈奎斯特频率的默认值是 1.0（因此采样频率 Fs = 2）。向量 bandmag 列出了每个通带与阻带之间的幅度。如果通带和阻带之间有一个过渡带，这被认为是“不关注”区域。因为 0 处第一边缘和 1 处奈奎斯特频率不包括在向量 edgepoints 中，edgepoints 向量长度是 bandmag 长度减去 2 的两倍。例如，选择一个带通滤波器阻带 [0 0.1]、过渡带 [0.1 0.12]、通带 [0.12 0.3]，一个过渡带 [0.3 0.32] 和一个阻带 [0.32 1.0]。输入向量 edgepoints 和输出向量 fpoints 相同，当 Fs = 2 时，即 [0.1 0.12 0.3 0.32]。输入向量 bandmag 长度是 3，可以选择其值，例如带通滤波器选择 [0 1 0]。向量 dev 列出通带和阻带内的最大偏差 δ_p 和 δ_s，如上所说，从指标 α_p 和 α_s 来计算。当 Fs 默认值为 2 时，输出向量 fpoints 和 edgepoints 一样，如果边缘点和采样频率是用 Hz 表示的实际频率，那么输出向量 fpoints 给出实际奈奎斯特频率 Fs/2 的归一化值。但必须指出，输出向量 magpoints 列出了通带和阻带的两个末端幅度。在上面的例子中，向量 magpoints 是 [0 0 1 1 0 0]。这个函数的输出作为 fir1 函数的输入数据和（也是稍后讨论的 remez）用来获取 FIR 滤波器的单位冲激响应系数。

考虑一个低通滤波器，通带在 [0 0.3]，幅度 1.0 和阻带 [0.4 1.0]，幅

度 0。在这种情况下，有 0.3 和 0.4 之间的过渡带，期间幅度不是所要求的，因此这是一个“不关注”区域。向量 edgepoints 是 [0.3　0.4]，向量 bandmag 是 [1.0　0.0]。对前一个带通滤波器的示例，我们已经提到 edgepoints 是 [0.1 0.12 0.3 0.32]，向量 bandmag 是 [0 1 0]。让我们为两个滤波器选择 $\delta_p=\delta_s=0.01$，即一个在通带内对数幅度 $\alpha_p=-20\lg(1-\delta_p)=0.087\text{dB}$ 的波纹和阻带 -40dB的增益。

估计低通滤波器阶数的 remezord 函数如下：

```
[N, fpoints, magpoints, wt] = remezord([0.3 0.4], [1.0 0.0],
  [0.01 0.01], 2)
```

而且产生一个值 $N=39$，向量 fpoints 与 bandmag 相同，而且 wt = [1.0 1.0]。如果选择采样频率为 2000Hz，使用 remezord（[0.3 0.4]，[1.0 0.0]，[0.01 0.01]，2000），输出将是 $N=39$，fpoints = [0.3 0.4]，magpoints = [1 1 0 0]，且向量 wt = [1.0 1.0]。如果 $\delta_p\neq\delta_s$ {即 wt = [(δ_s/δ_p) 1]}，向量 wt 中的元素将不相等。这些输出值作为 fir1（或 remez）输入来设计低通滤波器。

估计带通滤波器阶数的函数是

```
[N, fpoints, magpoints, wt]=remezord([0.1 0.12 0.3 0.32],
  [0.0 1.0 0.0], [0.01 0.01 0.01], 2).
```

给定 $N=195$，同样的向量 fpoints 作为输入向量 edgepoints，magpoints = [0 0 1 1 0 0] 和 wt = [1 1 1] 作为输入。

下面给出的 MATLAB 函数 kaiserord 是用来估计使用 Kaiser 窗 FIR 滤波器的阶数 N。此函数的输入参数与 remezord 函数一样，但输出是满足输入指标所要求的 Kaiser 窗的近似阶数 N、在 bandedges 的归一化频率、参数 beta 和 filtertype：

```
[N, Wc, Beta, ftype]=kaiserord(edgepoints, bandmag, dev, Fs)
```

对于上面要求的低通滤波器，使用

```
[N, Wc, Beta, ftype] =kaiserord([0.3 0.4], [1.0 0.0],
  [0.01 0.01], 2)
```

得到 N =45，Wc =0.35，Beta =3.3953。

对于带通滤波器，使用在 remezord 中使用的相同输入参数，得到输出参数为 N =224，Wc = [0.11　0.31]，Beta =3.3953，ftype = DC -0。当 ftype = DC -0 时，这意味着第一频带是阻带，而当为 DC -1 时，它表明第一个频带是通带。

5.4.2　FIR 滤波器设计

当我们发现滤波器阶数和任何其他参数与 remezord 和 kaiserord 函数输出一样时，我们使用 fir1 函数，各种形式所述如下：

```
b=fir1(N,Wc)
b=fir1(N,Wc,'ftype')
b=fir1(N,Wc,'ftype',window)
```

这些形式给出了线性 FIR 滤波器单位冲激响应或其传递函数系数的 $N+1$ 个样本。Wc 是低通滤波器的截止频率，忽略 ftype；当其中' ftype '是' high '时，它是高通滤波器的截止频率。但 W_c 是一个双元素向量 Wc = [W1 W2]，它列出了带通滤波器的两个截止频率 ω_{c1} 和 ω_{c2}（$\omega_{c2} \geqslant \omega_{c1}$）。（当有多个通带时使用 help fir1 了解更多细节）。' ftype '这个词不需要输入。当' ftype '类型为' stop '时，向量 Wc 代表带阻滤波器的截止频率。

如果滤波器是一个低通滤波器，当从 remezord 函数得到的阶数 N 为偶数时，它成为Ⅰ型滤波器，当阶数为奇数时，是Ⅱ型滤波器。注意Ⅱ型滤波器的频率响应在奈奎斯特频率处幅度响应为零，也就是说，它们的传递函数在 $z=-1$ 处为零，因此是一个奇数阶多项式。高通和带阻滤波器在奈奎斯特频率处没有零幅值，不能用Ⅱ型滤波器实现。当设计高通滤波器或带阻滤波器时，N 必须是一个偶整数，如果 remezord 函数的输出是一个奇数，fir1 函数自动将 N 增加 1 变成偶数。因为程序假定实数幅度和零相位，所以从此类频率指标得不到Ⅲ型和Ⅳ型滤波器。fir1 函数默认是汉明窗，但我们可以选择矩形（boxcar）窗，巴特利特窗，三角窗、汉明窗，汉宁窗，凯撒窗，道尔夫 - 切比雪夫（chebwin）窗。在得到 FIR 滤波器的系数后，可以找到滤波器的幅度（相位和群延迟），以确认它是否符合要求，否则我们可能不得不增加 N 的值，或改变向量 dev 中的值。

例 5.9

现在，我们已经获得了设计一个低通滤波器所需的所有输入数据，$N=39$，$\omega_c=0.3$ 及带通滤波器 $N=195$，$\omega_c=[0.12\quad 0.3]$，我们设计的 FIR 滤波器使用汉明窗和 Kaiser 窗。所以有 4 种情况，讨论如下：

设计 4 个滤波器的 M - files 如下，由此产生的幅度响应结果如图 5.13 ~ 图 5.17 所示。

如图 5.9 所示，必须指出的是，无论如何使用窗函数最小化吉布斯超调量。傅里叶级数法设计的滤波器幅度在 ω_c 处为 0.5，从函数 remezord 获得阶数 $N=39$ 仅仅是一个很保守的估计，因为函数使用会导致滤波器幅度响应不符合通带误差 $\delta_p=0.01$ 要求。所以我们必须依据试验和误差改变截止频率的值 ω_c 和滤波器阶数 N，直到满足要求。

对于 FIR 低通滤波器，我们不得不选择 $\omega_c=0.35$ 和 $N=65$，以便在频率 $\omega=0.3$ 处，误差 $\delta_p \leqslant 0.01$ 和 $\omega=0.4$ 处，误差 $\delta_s \leqslant 0.01$（相当于 40dB）。最终设计

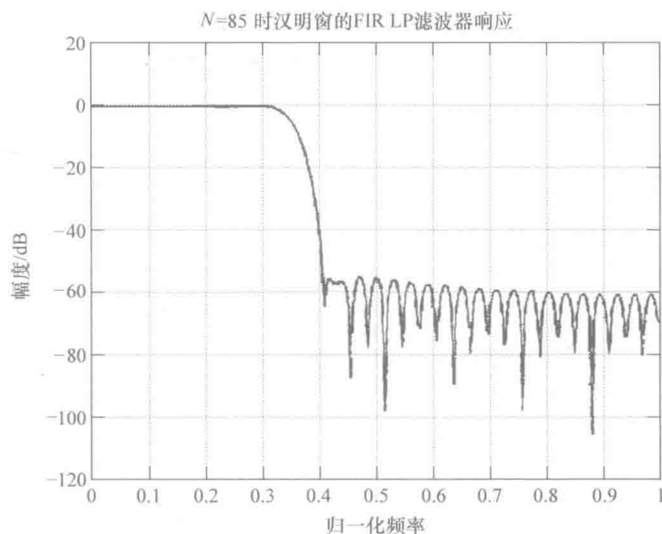


图 5. 13　使用汉明窗的 FIR 低通滤波器幅度响应

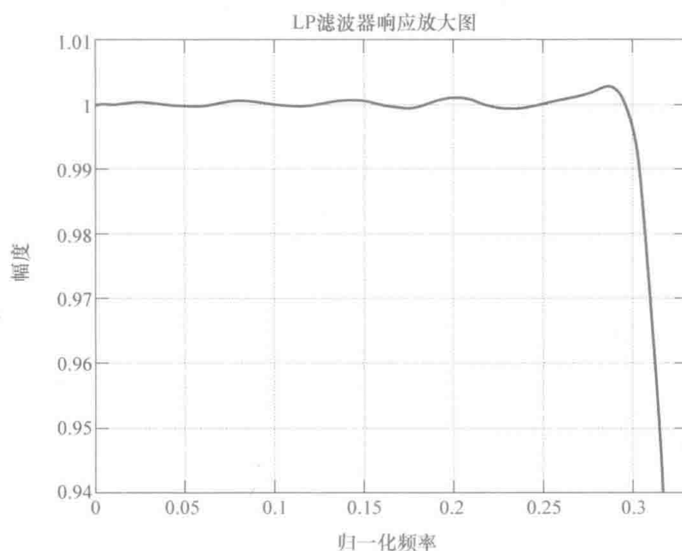


图 5. 14　FIR 低通滤波器通带放大频率响应

的幅度响应如图 5. 13 和图 5. 14 所示。使用傅里叶级数法设计其他滤波器时做类似的变化是必要的。

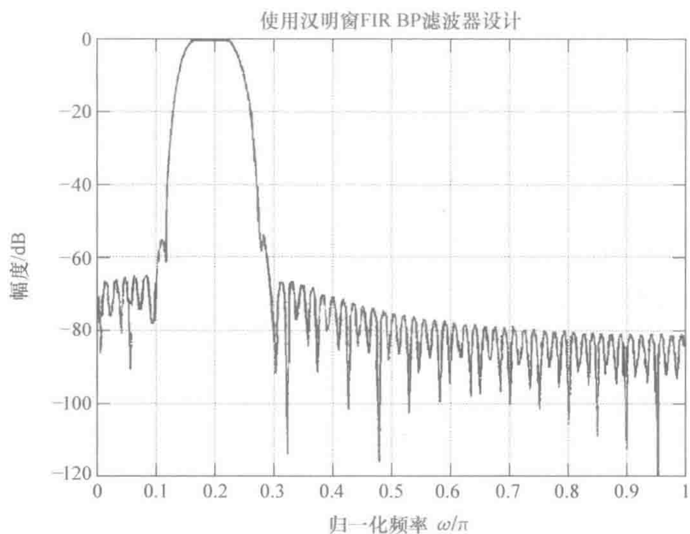


图 5.15　使用汉明窗的 FIR 带通滤波器幅度响应

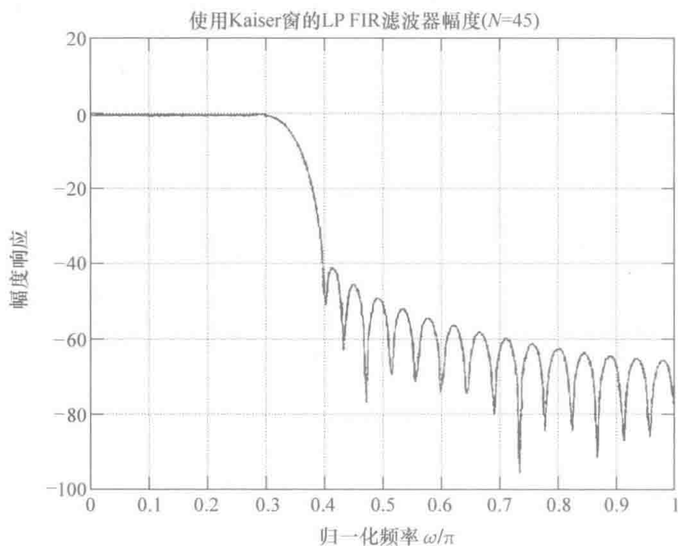


图 5.16　使用 Kaiser 窗 FIR 低通滤波器的幅度响应

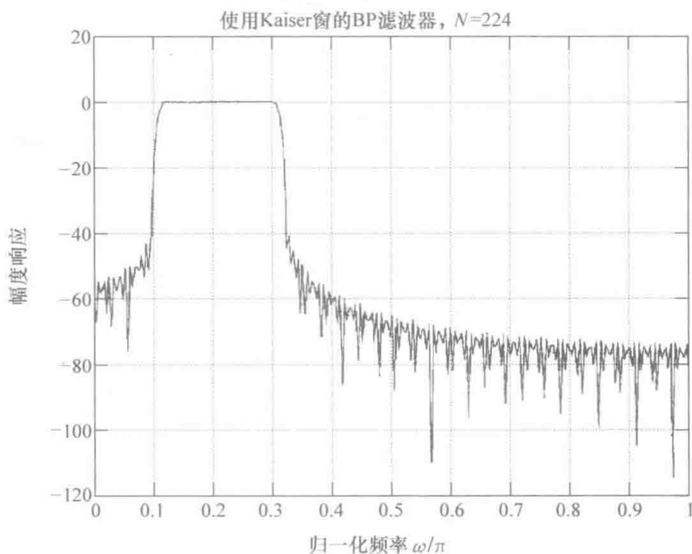


图 5.17　使用 Kaiser 窗 FIR 带通滤波器的幅度响应

```
%Case 1:Design of the LP filter with N=39 and Hamming window
b1=fir1(39, 0.3);
[h1,w]=freqz(b1, 1, 256);
H1db=20*log10(abs(h));
plot(w/pi, H1db);grid
title('Magnitude response of FIR LP filter with N=39 and
  Hamming window');
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Normalized frequency')

%Case 2:Design of the BP filter with N=195 and Haming window
b2=fir1(195, [0.12 0.31]);
[h2,w]=freqz(b2, 1, 256);
figure
H2db=20*log10(abs(h));
title('FIR BP filter with N=195 and Hamming window')
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Normalized frequency')

%Case 3:Design of the LP Filter using the Kaiser window:
%The length of Kaiser window must be one higher than the
%  order(N=45) of the FIR filter
%obtained from the function Kaiserord
```

```
b3=fir1(45, 0.35, kaiser(46, 3.3953));
[h3,w]=freqz(b3,1,256);
H3db=20*log10(abs(h3));
plot(w/pi,H3db);
title('Magnitude of LP with N=45 and Kaiser window')
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Normalized frequency').

%Case 4:Design of the BP Filter using the Kaiser window
b4=fir1(224, [0.11 0.31], kaiser(225, 3.3953));
[h4,w]=freqz(b4, 1, 256);
H4=abs(h4);
H4db=20*log10(H4);
figure
plot(w/pi,H4db);grid
title('Magnitude of BP filter N = 224 with Kaiser window')
ylabel('Magnitude in dB');
xlabel('Normalized frequency ')
```

5.5 等波纹线性相位 FIR 滤波器

使用改进的傅里叶级数法设计的 FIR 滤波器通带的频率响应如上所述，呈现单调减少响应和通带理想响应在截止频率 ω_c 有最大误差。现在讨论另一个重要的方法，用波纹来“扩散”通带内的误差，这样在几个点处最大误差是相同的，将变得很小。这种通带内最小化最大误差的方法，称为极小极大设计或等波纹设计。一个低通滤波器等波纹和切比雪夫响应的例子如图 5.18 所示。

对于Ⅰ~Ⅳ型 FIR 滤波器，频率响应在如式（5.22）所示，可以用以下形式表示：

$$H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[(N/2)\omega]}\left[h\left(\frac{N}{2}\right) + 2\sum_{n=1}^{N/2} h\left(\frac{N}{2} - n\right)\cos(n\omega)\right] \quad \text{Ⅰ型} \quad (5.47)$$

$$H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[(N/2)\omega]}\left\{2\sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left(\frac{N+1}{2} - n\right)\cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\} \quad \text{Ⅱ型} \quad (5.48)$$

$$H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[(N\omega-\pi)/2]}\left[2\sum_{n=1}^{N/2} h\left(\frac{N}{2} - n\right)\sin(n\omega)\right] \quad \text{Ⅲ型} \quad (5.49)$$

$$H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[(N\omega-\pi)/2]}\left\{2\sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left(\frac{N+1}{2} - n\right)\sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\} \quad \text{Ⅳ型} \quad (5.50)$$

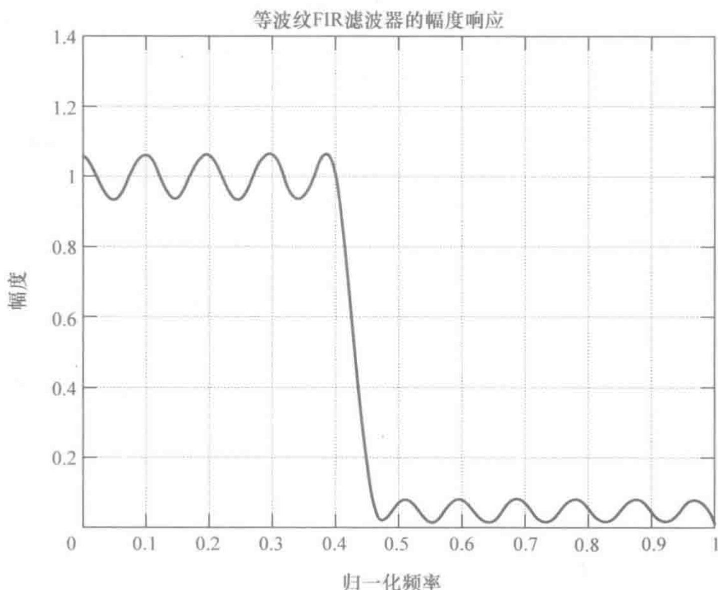


图 5.18　等波纹低通滤波器幅度响应

在一般情况下，方程式（5.47）~式（5.50）的形式是 $H(e^{j\omega}) = e^{-j(N\omega/2)}e^{j\beta} \times H_R(\omega)$，这里 β[⊖]是 0 或 $\pi/2$，取决于滤波器类型，而 $H_R(\omega)$是一个 ω 的实函数，可以有正值或负值。很容易看到，Ⅰ型滤波器 $H_R(\omega)$可以简化为（$2M = N$）

$$H_R(\omega) = \sum_{k=0}^{M} \tilde{a}[k]\cos(k\omega) \tag{5.51}$$

$$\tilde{a}[0] = h[M], \tilde{a}[k] = 2h[M-k], \qquad 1 \leqslant k \leqslant M \tag{5.52}$$

考虑Ⅱ型滤波器 $H_R(\omega)$如式（5.48）所示：

$$H_R(\omega) = 2\sum_{n=1}^{(N+1)/2} h\left(\frac{N+1}{2} - n\right)\cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

这可以简化到如下形式

$$H_R(\omega) = \sum_{k=1}^{(2M+1)/2} b[k]\cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \tag{5.53}$$

其中，$b[k] = 2h\{[(2M+1)/2] - k\}$，$1 \leqslant k \leqslant [(2M+1)/2]$。这可以简化到下面形式

$$H_R(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sum_{k=0}^{(2M-1)/2} \tilde{b}[k]\cos(k\omega) \tag{5.54}$$

⊖　这个 β 与 Kaiser 窗中用到的不同。

其中

$$
\begin{aligned}
&b[1]=\frac{1}{2}(\tilde{b}[1]+2\,\tilde{b}[0]) \\
&b[k]=\frac{1}{2}(\tilde{b}[k]+\tilde{b}[k-1]), \qquad 2\leqslant k\leqslant\frac{2M-1}{2} \\
&b\left[\frac{2M+1}{2}\right]=\frac{1}{2}\tilde{b}\left[\frac{2M-1}{2}\right]
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

考虑Ⅲ型滤波器函数 $H_{\mathrm{R}}(\omega)$。方程（5.49）可以简化到下面形式

$$
H_{\mathrm{R}}(\omega)=\sum_{k=1}^{(2M+1)/2}c[k]\sin(k\omega) \tag{5.56}
$$

其中 $c[k]=2h[M-k]$，$1\leqslant k\leqslant M$。这可简化到如下形式

$$
H_{\mathrm{R}}(\omega)=\sin(\omega)\sum_{k=0}^{M-1}\tilde{c}[k]\cos(k\omega) \tag{5.57}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&c[1]=\left(\tilde{c}[0]-\frac{1}{2}\tilde{c}[1]\right) \\
&c[k]=\frac{1}{2}(\tilde{c}[k-1]-\tilde{c}[k]), \qquad 2\leqslant k\leqslant M-1 \\
&c[M]=\frac{1}{2}\tilde{c}[M-1]
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

最后，Ⅳ型滤波器 $H_{\mathrm{R}}(\omega)$ 为

$$
H_{\mathrm{R}}(\omega)=\sum_{k=1}^{(2M+1)/2}d[k]\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega\right] \tag{5.59}
$$

这里 $d[k]=2h\{[(2M+1)/2]-k\}$，$1\leqslant k\leqslant(2M+1)/2$。方程（5.59）可以简化成如下形式

$$
H_{\mathrm{R}}(\omega)=\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sum_{k=0}^{(2M-1)/2}\tilde{d}[k]\cos(k\omega) \tag{5.60}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&d[1]=\left(\tilde{d}[0]-\frac{1}{2}\,\tilde{d}[1]\right) \\
&d[k]=\frac{1}{2}(\,\tilde{d}[k-1]-\,\tilde{d}[k]), \qquad 2\leqslant k\leqslant\frac{2M-1}{2} \\
&d\left[\frac{2M+1}{2}\right]=\tilde{d}\left[\frac{2M-1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

注意，我们可以表示系数 $\tilde{a}[.]$、$\tilde{b}[.]$、$\tilde{c}[.]$、$\tilde{d}[.]$ 为 a [.]、b [.]、c [.]、d [.] 的形式，因为它们是线性相关的。表达方程式（5.51），

式（5.54），式（5.57）和式（5.60）可以用一个通用的形式，如式（5.61），为所有 4 种类型的过滤波器开发通用算法，获得极大极小近似。

$$H_R(\omega)=Q(\omega)P(\omega) \tag{5.61}$$

其中

$$Q(\omega)=\begin{cases}1 & \text{Ⅰ型}\\ \cos\left(\dfrac{\omega}{2}\right) & \text{Ⅱ型}\\ \sin(\omega) & \text{Ⅲ型}\\ \sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right) & \text{Ⅳ型}\end{cases} \tag{5.62}$$

和

$$P(\omega)=\sum_{k=0}^{K}\alpha[k]\cos(k\omega) \tag{5.63}$$

其中

$$\alpha[k]=\begin{cases}\tilde{a}[k] & \text{Ⅰ型}\\ \tilde{b}[k] & \text{Ⅱ型}\\ \tilde{c}[k] & \text{Ⅲ型}\\ \tilde{d}[k] & \text{Ⅳ型}\end{cases} \tag{5.64}$$

和

$$K=\begin{cases}M & \text{Ⅰ型}\\ \dfrac{2M-1}{2} & \text{Ⅱ型}\\ M-1 & \text{Ⅲ型}\\ \dfrac{2M-1}{2} & \text{Ⅳ型}\end{cases} \tag{5.65}$$

我们定义了一个加权误差函数

$$\begin{aligned}J(\omega)&=W(e^{j\omega})[H_R(\omega)-H_d(e^{j\omega})]=W(e^{j\omega})[Q(\omega)P(\omega)-H_d(e^{j\omega})]\\&=W(e^{j\omega})Q(\omega)\left[P(\omega)-\frac{H_d(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})}\right]\end{aligned} \tag{5.66}$$

使用符号 $W(e^{j\omega})Q(\omega)=\widetilde{W}(e^{j\omega})$ 和 $H_d(e^{j\omega})/Q(e^{j\omega})=\widetilde{H}_d(e^{j\omega})$，这个方程现在重新改写成另一种形式

$$J(\omega)=\widetilde{W}(e^{j\omega})[P(\omega)-\widetilde{H}_d(e^{j\omega})] \tag{5.67}$$

在这些方程中，$H_d(e^{j\omega})$ 是在归一化子区间 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 上要求的频率响应，$W(e^{j\omega})$ 是设计者为突出在不同子区间上误差相对幅度而选择的一个加权函数。

在通常的滤波器设计应用中，要求的幅度如下

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1\pm\delta_p & \text{在通带}\\ 0+\delta_s & \text{在阻带}\end{cases} \tag{5.68}$$

加权函数 $W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 可以选择为

$$W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\begin{cases}1 & \text{在通带}\\ \dfrac{\delta_{\mathrm{p}}}{\delta_{\mathrm{s}}} & \text{在阻带}\end{cases}$$

或

$$W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\begin{cases}\dfrac{\delta_{\mathrm{s}}}{\delta_{\mathrm{p}}} & \text{在通带}\\ 1 & \text{在阻带}\end{cases}$$

式（5.67）中系数 $\alpha[k]$ 是要寻找的未知变量，以使在子区间 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 上误差 $|J(\omega)|$ 值最小化。本章参考文献［13］证明，当达到最小值时，频率响应呈现等波纹行为：

$$\underset{\text{over}\{\alpha[k]\}}{\min}\quad\underset{\text{over}\{S\}}{\max}\quad|\widetilde{W}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})[P(\omega)-\widetilde{H}_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]| \tag{5.69}$$

这里 $\{S\}$ 是用来表示在 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 内不连续频带的整体。

一旦确定这些系数，系数 $h(n)$ 能从来于滤波器类型的 $\alpha[k]$ 和 $a[k]$、$b[k]$、$c[k]$ 和 $d[k]$ 的逆向关系得到。

Parks 和 McClellan[2] 是最小化误差函数 $J(\omega)$ 最大绝对值的创始者，用切比雪夫逼近理论，设计了一个名为雷米兹交换算法来实现它。他们还发表了一个计算机程序（用 FORTRAN）来设计等波纹、线性相位滤波器。虽然算法和软件已经被别人进行了较大的改进[13]，但仍然被称为 Parks - McClellan 算法或 Remez 交换算法。在下面部分，我们将使用 MATLAB 函数 remez 设计几个例子。

5.6 使用 MATLAB 设计等波纹 FIR 滤波器

第一步是应用前面介绍的 remezord 函数估计滤波器的阶数。下一步是使用 remez 函数找到 FIR 滤波器的系数，有这几个选项：

```
b=remez(N, fpoints, magpoints)
b=remez(N, fpoints, magpoints, wt)
b=remez(N, fpoints, magpoints, 'ftype')
b=remez(N, fpoints, magpoints, wt, 'ftype')
```

向量 fpoints 列出了通带和阻带的边缘，从 $\omega=0$ 开始和到 $\omega=1$（归一化奈奎斯特频率）结束。与函数 remezord 相比，这个向量 fpoints 包括 0 和 1.0 对应的首项和末项。通带边缘和相邻阻带之间至少相隔 0.1；否则，程序自动在两者之间创建一个 0.1 的过渡带，这些过渡带被视为“不关注”区域。向量 magpoints

列出了通带和阻带每个边缘处的频率响应。加权函数可用于描述以上描述的每个频带。函数 remez 默认选择偶数阶数 I 型滤波器和奇数阶数 Ⅱ 型滤波器。标识"hilbert"和"differentiator"是 ftype 选项，用于分别设计 Hilbert 变换器和微分器。另一个输入变量和从 remezord 获得的输出相同，因此我们可以使用两个函数 remezord 和 remez 在一起的 M－File 文件设计一个等波纹的线性相位 FIR 滤波器，列出如下。

5.6.1　使用 MATLAB 程序设计等波纹 FIR 滤波器

例 5.10

```
%Program to obtain the unit impulse response coefficients
%  of an equiripple, FIR filter with a linear phase
edgepoints= input('Type in the edge frequencies of
  each band =');
%Type in normalized edge frequencies between 0 and 1,
%  excluding 0 and 1, when Fs=2
%or actual frequencies in Hz and choose FT also in Hz
Fs= input('Sampling frequency in Hz =')
%The bandmag is the magnitude in each band from 0 to 1
bandmag =input('Type in the magnitude values for each
  passband and stopband =');
% There must be one value in dev and in wt for each band
dev=input('Desired ripple in each band =');
wt=input('Type in values for the relative weights in each
  band=');
[N, fpoints, magpoints, wt]=remezord(edgepoints, bandmag,
  dev, Fs);
disp('Order of the FIR filter is');disp(N);
b=remez(N, fpoints, magpoints, wt);
[h, w]=freqz(b, 1, 256);
H=abs(h);
Hdb=20*log10(H);
plot(w/pi,Hdb);grid
title('Magnitude response of the equiripple, linear phase
  FIR filter')
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Normalized frequency')
```

这个程序可以用来设计低通、高通、带通、带阻滤波器。如果滤波器不满足设计要求，应该提高滤波器阶数 1、2 或 3 直到满足通带和阻带设计要求。但是当截止频率非常接近 0 或 1 时，而且当我们在设计高通和带阻滤波器时，remezord 函数估计的 N 值可能不可接受，我们可能不得不任意选择以满足设计要求。

如果你对获得在一个频率范围内幅度响应的放大视图感兴趣，如通带，那么应在上面的程序下面加上下面的几行程序。在轴函数中，选择 wc1 =0 和 wc2 = 低通滤波器的通带边缘频率和 wc1 、wc2 作为带通滤波器通带或带阻滤波器阻带的上下截止频率：

```
%Add the following lines to get an enlarged view of the
%  magnitude response
figure
wc1=input('Type in the lower cutoff frequency =')
wc2=input('Type in the upper cutoff frequency=')
plot(w/pi,Hdb);Grid
axis([wc1 wc2 -0.5 0.5]);
title('Enlarged plot of the magnitude response')
ylabel('Magnitude in dB')
xlabel('Normalized frequency')
```

例 5.11

让我们使用以上程序产生几个与以前设计同样要求的低通和带通等波纹滤波器。录入下列输入数据设计一个等波纹低通滤波器：

```
edgepoints:[0.3 0.4]
bandmag   :[1 0]
dev       :[0.01 0.01]
wt        :[1 1]
```

低通滤波器的频率响应如图 5.19 所示，通带响应的放大效果如图 5.20 所示。可以看到，通带的偏差在 0.087 dB，相当于在通频带 $\delta_p = 0.01$，但是在阻带幅度不等于或小于 -40 dB，对应 $\delta_s = 0.01$。

所以我们增加 N 的值从 39 到 41，显示得到的滤波器响应如图 5.21 所示，它满足所需的阻带幅度要求。

接下来设计一个等波纹带通滤波器，与那些使用汉明窗和凯撒窗的要求相同。输入参数值如下：

```
edgepoints    :[0.1 0.12 0.3 0.32]
bandmag       :[0 1 0]
dev           :[0.01 0.01 0.01]
wt            :[1 1 1]
```

等波纹滤波器的幅度响应如图 5.22 所示。

当我们使用与前面带阻滤波器相同的边沿点向量设计一个等波纹带阻滤波器时，即使滤波器阶数从 195 增加到 205，我们也只得到一个不符合要求的响应。同样，使用雷米兹算法设计高通滤波器也并不总是成功的。在 5.7 节中，建议采用另一种方法来解决这种问题。

还应该记住，雷米兹算法受限于滤波器阶数大于 3。有趣的是使用傅里叶级

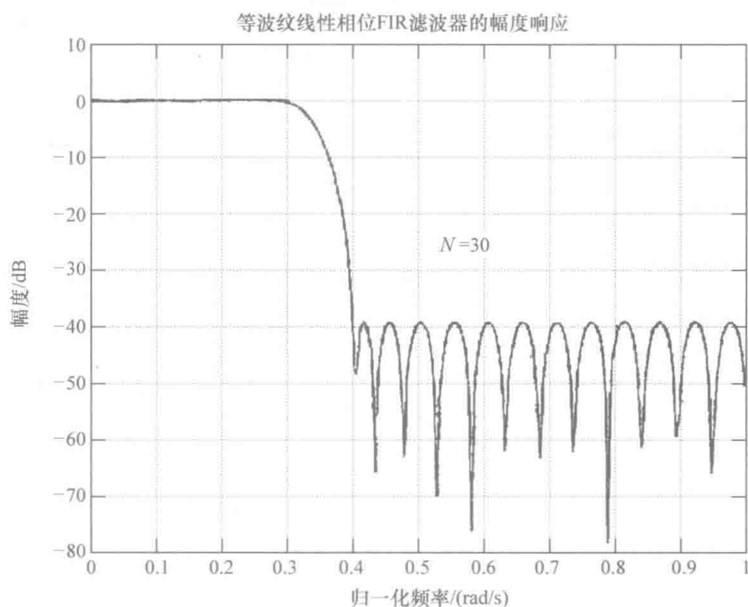


图 5.19 等波纹 FIR 低通滤波器 $N=39$ 时的幅度响应

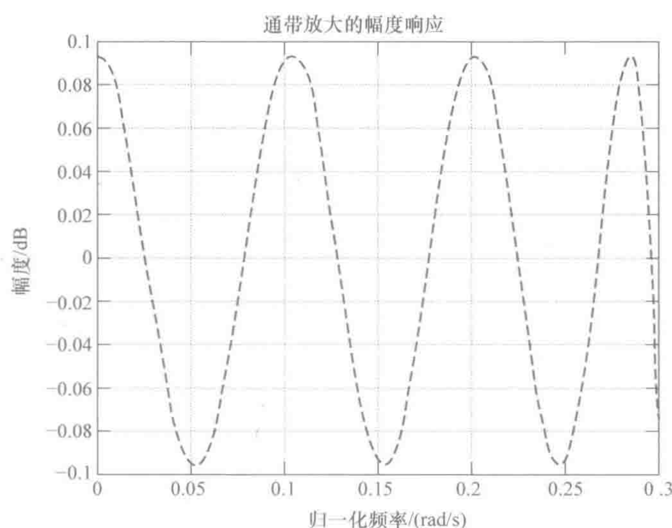


图 5.20 等波纹 FIR 低通滤波器的通带响应放大图

数和汉明窗方法设计阶数为 195 的带通滤波器比使用雷米兹算法设计同等长度的带通滤波器有更高的阻带衰减。

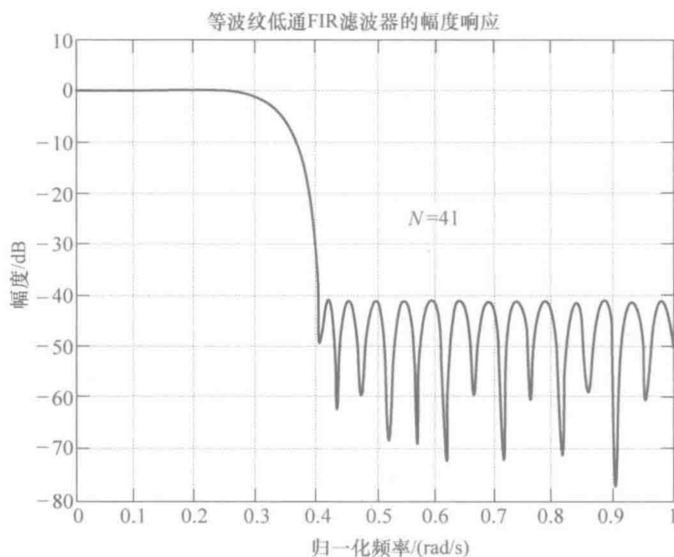


图 5.21　等波纹 FIR 低通滤波器 $N=41$ 时的幅度响应

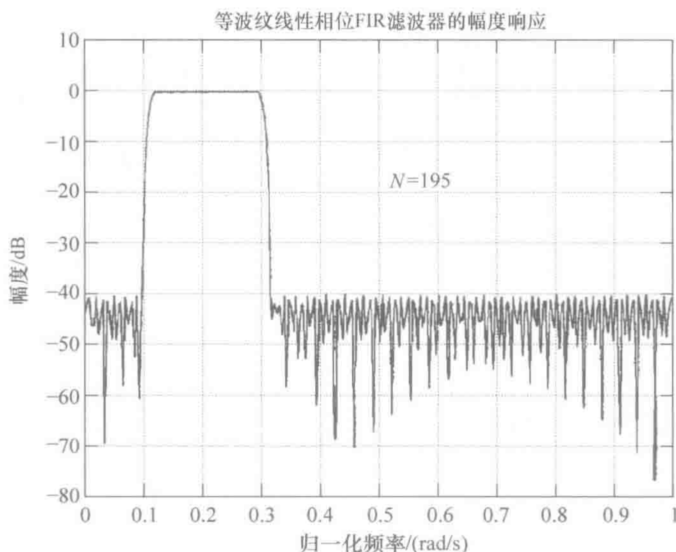


图 5.22　等波纹 FIR 带通滤波器的幅度响应

5.7　频率采样法

在上述设计线性相位滤波器的方法中，不连续点的幅度响应指定为常数，不关注过渡带。在本节中，我们简要讨论一下 MATLAB 函数 fir2，它可用于设计多

段线性相位滤波器等。

```
b=fir2(N, F, M)
b=fir2(N, F, M, window)
b=fir2(N, F, M, window, npt)
```

作为这个函数的输入参数，N 是滤波器阶数，F 是要求幅度在 0 和 1 频率区间的频率向量。在向量 F 中，包括末端频率 0 和 1，和包含在向量 M 中的这些频率处的幅值，所以 F 和 M 的长度相同。参数 npt 是 0 和 1 之间的等间隔网格点数，默认值为 512。相邻频带的边缘频率可被包含其中，将在向量 F 中呈现两次，表明一个跳跃不连续。这个函数的输出是线性相位 FIR 滤波器单位冲激响应的$N+1$ 个系数。

例 5.12

```
%Program to design an FIR fiter using fir2
F =[0 0.25 0.25 0.5 0.65 0.75 0.9 1.0];
M = [0 1 0.5 0.5 0 0 0.3 0.3];
b=fir2(128, F, M);
[h,w]=freqz(b, 1, 256);
H=abs(h);
plot(w/pi,H);Grid;
title(''Multistage Magnitude Response of an FIR linear
  phase filter')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
%end
```

这个滤波器的幅度响应如图 5.23 所示。

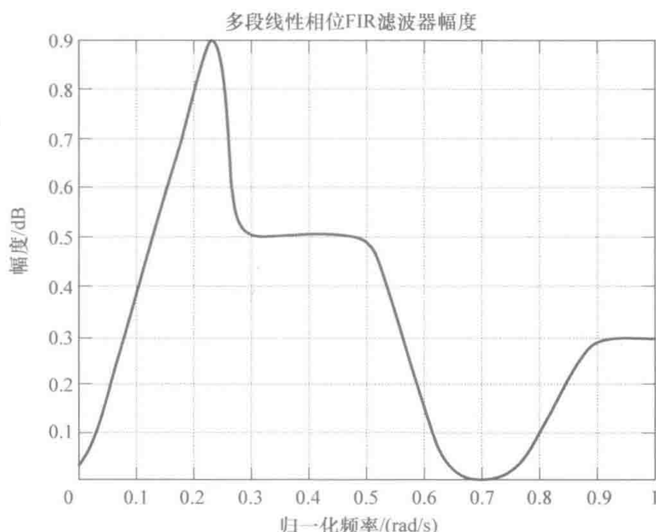


图 5.23　多段 FIR 滤波器幅度响应

函数 fir2 利用一个 FIR 滤波器的 DFT 和 IDFI 之间的关系。注意，我们规定了滤波器频率范围 0 ~ 1.0 的幅度响应和函数假定 DFT 函数样本数关于奈奎斯特频率对称和推断样本数达到采样频率，才找到了逆 DFT。我们还规定相位为零，因此函数仅限于Ⅰ型和Ⅱ型滤波器。

为设计通常的线性相位 FIR 滤波器，让我们首先回顾一下一个数字滤波器的 DTFT 结果

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j(M\omega-\beta)} \lfloor \rfloor$$

这里对于Ⅰ型和Ⅱ型滤波器，$M=(N-1)/2$，$\beta=0$，对于Ⅲ型和Ⅳ型滤波器 $M=(N-1)/2$，$\beta=\pm(\pi/2)$。

接下来，注意通常使用的 DFT - IDFT 对，N 是 FIR 滤波器的长度或单位冲激响应系数 $h(n)$ 的数量，也等于 DFT 样本 $H(k)$ 的数量，所示关系如下：

$$\begin{aligned} H(k) &= H(e^{j(2\pi/N)k}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(2\pi/N)kn} \\ &= | H(e^{j(2\pi/N)k}) | \ e^{-j[M(2\pi/N)k-\beta]} \qquad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{5.70}$$

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nk} \qquad n = 0,\cdots,N-1 \tag{5.71}$$

对于一个线性相位 FIR 滤波器，$h(n) = \pm h(N-1-n)$，$n=0, 1, 2, \cdots, N-1$，这里加号用于Ⅰ型和Ⅱ型线性相位滤波器，减号用于Ⅲ型和Ⅳ型线性相位滤波器。

DFT $H(k)$ 必须满足下列条件：

$$H(k) = \begin{cases} H(0) & k=0 \\ H(N-k) & k=1,2,\cdots,(N-1) \end{cases}$$

$$\measuredangle H(k) = \begin{cases} -\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & k=0,1,\cdots,\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor \\ & \text{Ⅰ型和Ⅱ型滤波器} \\ +\left(\frac{N-1}{2}\right)\left[\frac{2\pi(N-k)}{N}\right] & k=\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor+1,\cdots,N-1 \\ & \text{Ⅰ型和Ⅱ型滤波器} \\ \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{N}\right) & k=0,1,\cdots,\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor \\ -\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{N-1}{2}\right)\left[\frac{2\pi(N-k)}{N}\right] & k=\left\lfloor\frac{N-1}{2}\right\rfloor+1,\cdots,N-1 \\ & \text{Ⅲ型和Ⅳ型滤波器} \end{cases}$$

这些关系为我们提供了一个找到线性相位 FIR 滤波器单位样本响应的通用方法，即在离散频率 $\omega_k=(2\pi/N)k$ 处 $|H(e^{j\omega})|e^{-j(M\omega-\beta)}$ 值的 DFT 样本。因此我们可以指定整个频率范围的幅度和相位，包括滤波器的过渡带。接下来的方法用于找到完全数值化的单位样本响应系数 $h(n)$，而且我们知道用于计算 DFT 和 IDFT 样本的有效的 FFT 技术。在第 3 章，我们已经分别使用了 MATLAB 函数 fft 和 ifft 计算 DFT 和 IDFT，函数 fir2 简单地由其中的向量 F 和 M 实现 $H(k)$ 的 IDFT。

5.8 小结

在这一章，我们讨论了线性相位 FIR 滤波器的设计理论和逼近理想 LP、HP、BP 和 BS 滤波器的幅度响应，这些滤波器幅度要求平滑但不一定分段恒定。我们还描述了一些非常有效的和著名的 MATLAB 函数，在设计这些滤波器时获得了很好的效果。但在某些情况下，这些函数（和其他几个不包含在本章的函数）工作效果不很满意。鼓励学生基于各种要求及输入参数广泛使用这些 MATLAB 函数以积累经验，洞察相关优点和各种方法及 MATLAB 函数的优势。要指出的是，remez 函数在设计高通和带阻滤波器时不是很有效。建议采用下面的另一种方法来解决这个问题。然而，下面的三个转换[1]在将 I 型滤波器变换成多个其他幅度响应时更一般且有用。

考虑一个 I 型滤波器：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{2M}h(n)z^{-n},h(2M-n)=h(n)$$

通带频率为 ω_p 和阻带频率为 ω_s。其零相位频率响应是

$$H_R(\omega)=h(M)+\sum_{n=1}^{M}2h(M-n)\cos(n\omega)$$

我们可以获得三个新类型的 I 型滤波器传递函数：

$$G(z)=\begin{cases}z^{-M}-H(z) & \text{变换 A}\\(-1)^M H(-z) & \text{变换 B}\\z^{-M}-(-1)^M H(-z) & \text{变换 C}\end{cases}$$

这些滤波器给出相应的频率响应如下

$$G(\omega)=\begin{cases}1-H(\omega) & \text{变换 A}\\H(\pi-\omega) & \text{变换 B}\\1-H(\pi-\omega) & \text{变换 C}\end{cases}$$

这些滤波器响应如图 5.24 所示。我们注意到变换 A 将通带截止频率 ω_p 和阻带频率 ω_s 的 I 型滤波器变换成一个截止频率 ω_s 和阻带频率 ω_p 的高通滤波器，而变换 B 将低通滤波器转换成截止频率（$\pi-\omega_p$）和阻带频率（$\pi-\omega_s$）的高通滤波器。

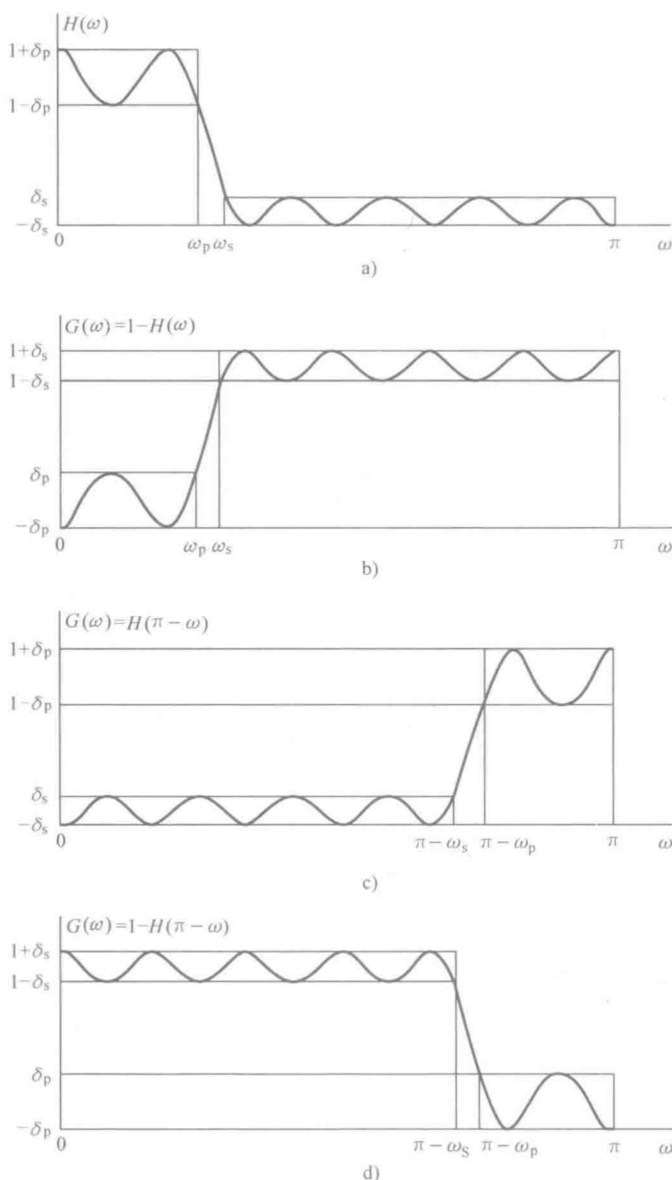


图 5.24　低通滤波器响应到其他类型滤波器响应的变换

为设计一个通带和阻带截止频率分别为$\bar{\omega}_p$ 和$\bar{\omega}_s$ 的等波纹高通滤波器，我们首先设计一个等波纹 FIR 低通滤波器，通带频率 $\omega_p = \pi - \bar{\omega}_p$ 和阻带频率 $\omega_s = \pi - \bar{\omega}_s$。让它的传递函数 $H(z) = \sum_{n=0}^{2M} h(n) z^{-n}$。然后，使用变换 $G(z) = (-1)^M$

$H(-z)$，我们得到高通滤波器传递函数 $G(z) = \sum_{n=0}^{2M}[(-1)^{M+n}h(n)]z^{-n}$。C 变换将 I 型滤波器变换成另一个低通滤波器，截止频率为（$\pi - \omega_s$）和阻带频率为（$\pi - \omega_p$）。在任何一种方法均不能给出正确结果时，这些变换给我们提供另外的工具来设计滤波器。

习题

5.1　用 $e^{j\theta}\{H_R(w)\}$ 形式，推导如下给出的 FIR 滤波器 $H(z^{-1})$ 的频率响应函数，并确定滤波器类型：

$$H_1(z^{-1}) = 1 + 0.6z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} + 0.6z^{-5} + z^{-6}$$

$$H_2(z^{-1}) = 1.2 + 0.1z^{-1} + 0.9z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} - 0.9z^{-5} - 0.1z^{-6} - 1.2z^{-7}$$

$$H_3(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} - z^{-5}$$

$$H_4(z^{-1}) = 1 + z^{-3} + z^{-6}$$

$$H_5(z^{-1}) = 0.4z^{-1} - 0.6z^{-2} + 1.4z^{-3} + 0.6z^{-4} - 0.4z^{-5}$$

5.2　给定一个多项式 $P_1(z^{-1}) = 1 - 2.5z^{-1} + 5.25z^{-2} - 2.5z^{-3} + z^{-4}$，在 $z = 1 + j\sqrt{3}$ 处有一个零点，求 $P_1(z^{-1})$ 的其他零点。

5.3　多项式 $P_2(z^{-1}) = 1.0 - 1.5z^{-1} + 2.75z^{-2} + 2.75z^{-3} - 1.5z^{-4} + z^{-5}$ 在 $z = 0.25 - j0.433$ 处有零点，求 $P_2(z^{-1})$ 的其他零点。

5.4　多项式 $P_3(z^{-1}) = 1 + 3.25z^{-2} - 3.25z^{-4} - z^{-6}$ 在 $z = 0.5e^{j1.5\pi}$ 处有零点，求 $P_3(z^{-1})$ 的其他零点。

5.5　求多项式 $D(z^{-1}) = 1 + 0.2z^{-1} - 0.5z^{-2} + 0.04z^{-3}$ 的镜像多项式 $N(z^{-1})$。证明 $H(e^{-j\omega}) = N(e^{-j\omega})/D(e^{-j\omega})$ 在所有频率处的幅度是常数。

5.6　求多项式 $D(z^{-1}) = 1 + 0.32z^{-1} + 0.6z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.1z^{-4}$ 的反镜像多项式 $N(z^{-1})$。证明 $H(e^{-j\omega}) = N(e^{-j\omega})/D(e^{-j\omega})$ 在所有频率处的幅度是常数。

5.7　低通 FIR 滤波器的通带位于 1.04 和 0.96 之间，它的阻带低于 0.0016。求其通带衰减 α_p 和阻带衰减 α_s。

5.8　低通 FIR 滤波器的通带位于 1.15 和 0.9 之间，它的阻带低于 0.0025。求其通带衰减 α_p 和阻带衰减 α_s。

5.9　低通 FIR 滤波器的通带位于 $1 + \delta_p$ 和 $1 - \delta_p$ 之间，其阻带在 δ_s 以下。如果通带衰减为 0.15dB 和阻带衰减是 45dB，δ_p 和 δ_s 值分别是多少？

5.10　低通 FIR 滤波器的通带位于 $1 + \delta_p$ 和 $1 - \delta_p$ 之间，其阻带低于 δ_s。如果通带衰减为 0.85dB 和阻带衰减是 85dB，δ_p 和 δ_s 值分别是多少？

5.11 设计一个低通 FIR 滤波器，长度为 15，$\omega_c=0.6\pi$，使用傅里叶级数法，用汉窗截断，并延迟 7 个样本得到因果滤波器的传递函数。

5.12 设计一个 FIR 带通滤波器，$\omega_{c2}=0.5\pi$ 和 $\omega_{c1}=0.1\pi$，使用傅里叶级数的方法和长度为 9 的矩形窗，求因果 FIR 滤波器传递函数的 $h(3)$ 和 $h(9)$ 的值。

5.13 在带通 FIR 滤波器 $H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{10}h(n)z^{-n}$ 的设计中，使用傅里叶级数法和巴特利特窗逼近 $\omega_{c2}=5\pi/6$ 和 $\omega_{c1}=\pi/2$ 滤波器的幅度响应，求 $h(3)$ 和 $h(7)$ 样本的值。

5.14 一个 FIR 带通滤波器截止频率为 0.25π 和 0.5π。求它的传递函数 $H(z^{-1})=\sum_{n=0}^{10}h(n)z^{-n}$ 的系数 $h(3)$ 和 $h(6)$，假设设计使用傅里叶级数方法和布莱克曼窗。

5.15 设计一个数字滤波器，长度为 9，使用汉明窗获得一个高通滤波器 $\omega_c=0.4\pi$ 的响应。

5.16 微分器频率响应傅里叶级数的系数如下给出：

$$c(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ \dfrac{\cos(\pi n)}{n} & |n|>0\end{cases}$$

使用长度为 9 的汉宁窗，求逼近微分器幅度响应的因果 FIR 滤波器的系数 $h(6)$。

5.17 一个数字滤波器频率响应的傅里叶级数系数是 $c(n)=(0.5)^{|n|}$，$-\infty<n<\infty$。窗口函数 $w(n)=(-1)^n$，$-7\leqslant n\leqslant 7$，应用于这个序列，乘积推迟了 7 个样本后获得一个因果序列 $h(n)$。$h(n)$ 的第四和第八个样本值是多少？

5.18 $x_1(n)$ 窗长度为 11，如图 5.25a 所示，$y_1(n)=x_1(n)*x_1(n)$。绘制函数 $y_1(n)$ 图并求其频率响应 $Y_1(e^{j\omega})$。

5.19 求卷积 $y_2(n)=x_2(n)*x_2(n)$，$x_2(n)$ 如图 5.25b 所示。绘制 $y_2(n)$ 图，推导其频率响应 $Y_2(e^{j\omega})$。

5.20 图 5.27a，b 描述的两个滤波器级联后的频率响应是什么？

5.21 绘制 $y(n)=x_1(n)x_2(n)$ 的频谱，这里 $x_1(n)=10\cos(0.5\pi n)$，$x_2(n)=\cos(0.25\pi n)$。

5.22 如果题 5.21 中信号 $y(n)$ 是图 5.27b 所示滤波器的输入，输出信号是什么？

5.23 求图 5.26a，b 所示的 LTI DT 系统的 DTFT 傅里叶级数系数的表达式 $(-\infty<n<\infty)$。

5.24 分别求图 5.27a，b 所示的 LTI DT 系统的 DTFT 傅里叶级数系数的表

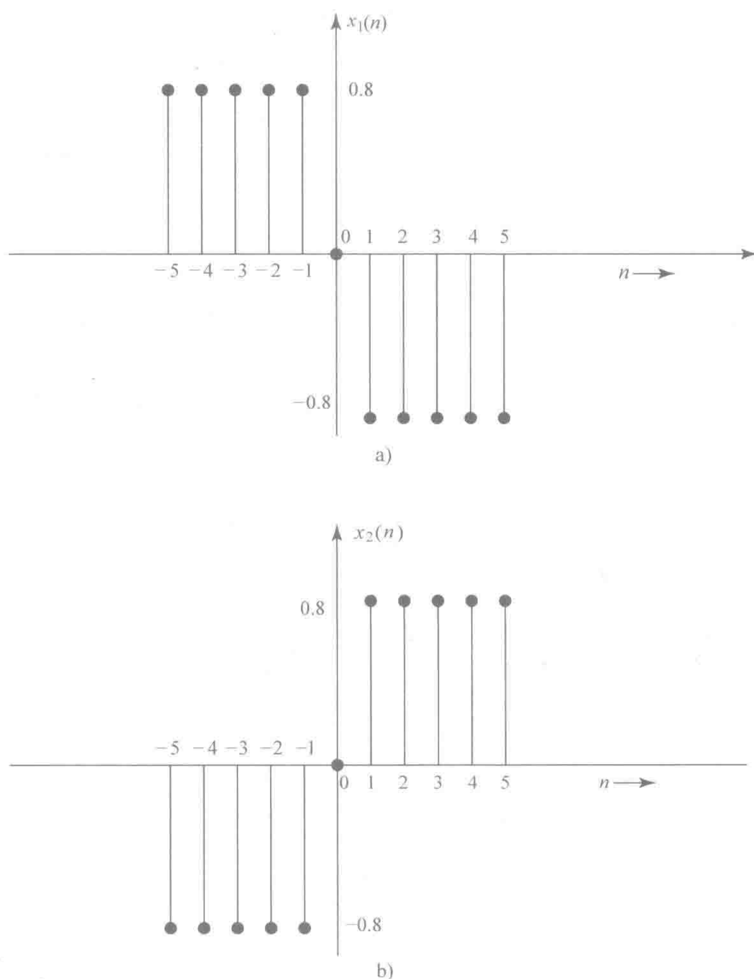


图 5.25　习题 5.18 和习题 5.19

达式（$-\infty<n<\infty$）。

5.25　设计一个 HP、FIR 滤波器，长度为 21 和 $\omega_c=0.4\pi$，使用汉窗。用 MATLAB 函数 fft 绘制幅度响应。

5.26　求图 5.28a，b 所示的 LTI DT 系统的 DTFT 傅里叶级数系数的表达式（$-\infty<n<\infty$）。

5.27　求图 5.29a 所示低通数字滤波器频率响应的傅里叶系数，奈奎斯特频率为 500Hz。

5.28　求图 5.29b 所示低通滤波器的频率响应的傅里叶级数的系数，$-5<n<5$。

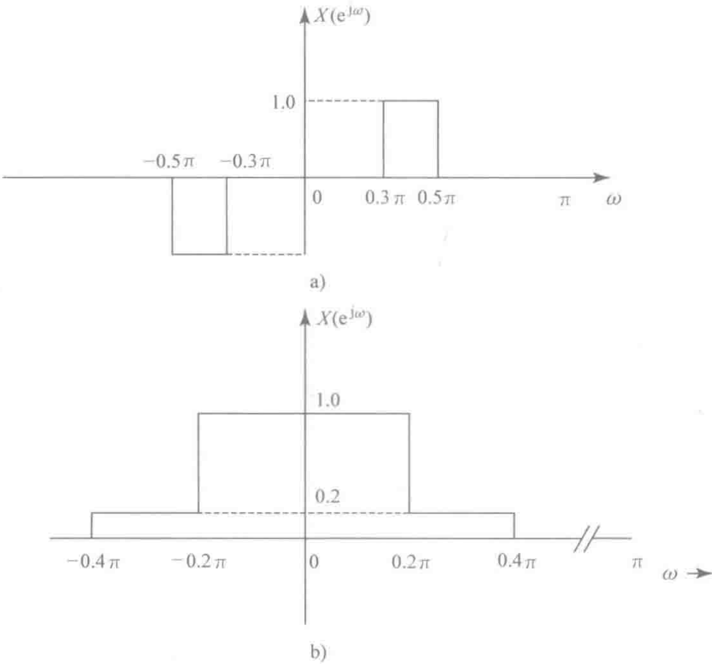


图 5. 26　习题 5. 23

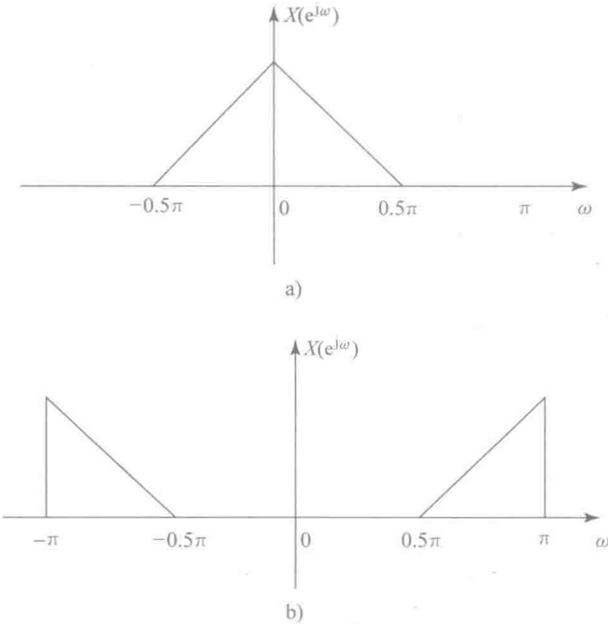


图 5. 27　习题 5. 24

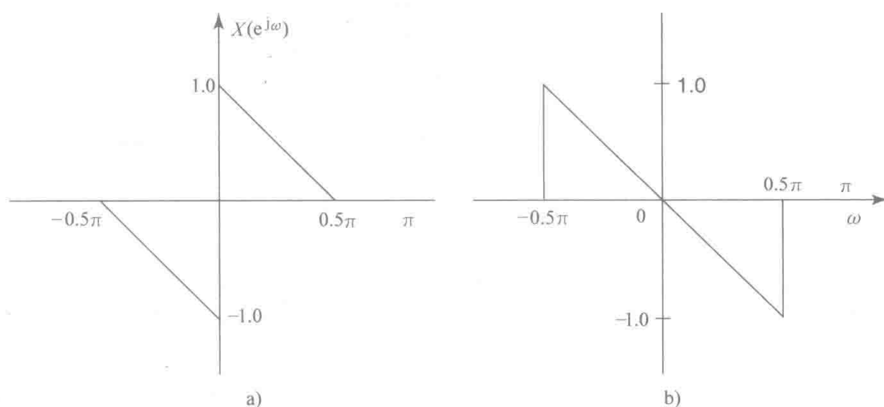


图5.28　习题5.26

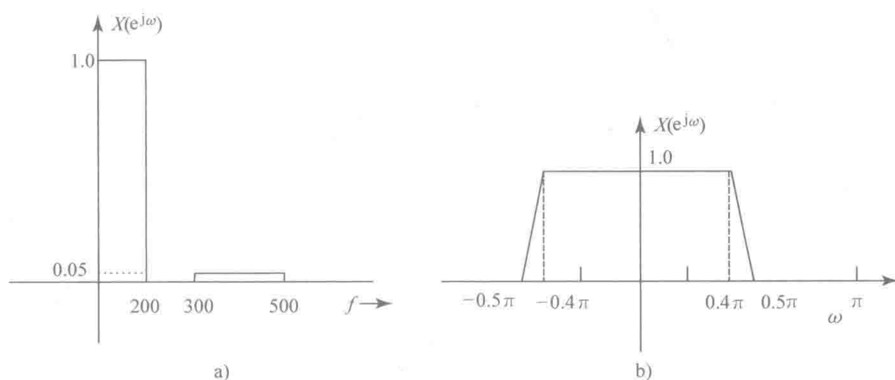


图5.29　习题5.27和习题5.28

5.29　采样如图5.29b所示低通滤波器的频率响应后，使用MATLAB函数fir2，求单位冲激响应的系数，$0 \leqslant n \leqslant 64$，并与题5.28结果对比。

MATLAB习题

5.30　设计一个FIR低通滤波器，长度21，$\omega_p = 0.2\pi$和$\omega_s = 0.5\pi$，过渡带使用阶数$p = 2$、4的样条函数。在同一图中绘出这些滤波器的幅度响应。比较它们的特点。

5.31　设计一个FIR低通滤波器，长度41，$\omega_p = 0.3\pi$和$\omega_s = 0.5\pi$，过渡带使用阶数$p = 2$、4的样条函数。在同一图中绘出这些滤波器的幅度响应。比较它

们的特点。

5.32 设计一个 FIR 低通滤波器，长度41，$\omega_p=0.4\pi$ 和 $\omega_s=0.5\pi$，过渡带使用阶数 $p=2$、4 的样条函数。在同一图中绘出这些滤波器的幅度响应。比较它们的特点。

5.33 设计一个 FIR 低通滤波器，通带截止频率 $\omega_c=0.25\pi$，幅度为 2dB，阻带频率 $\omega_s=0.4\pi$，幅度为 0.02。用汉明窗和汉宁窗。绘制幅度响应并验证设计要求。

5.34 设计一个高通 FIR 滤波器，通带截止频率 $\omega_c=0.45\pi$，幅度为 2dB，阻带频率 $\omega_s=0.2\pi$，幅度为 0.02。用汉明窗和凯撒窗，长度为 50。绘制幅度响应并验证设计是否符合要求。

5.35 设计一个带通 FIR 滤波器，通带频率 $\omega_{c1}=0.4\pi$ 和 $\omega_{c2}=0.6\pi$，幅度为 2.5，使用凯撒窗，绘制滤波器的幅度响应。

5.36 设计一个带通滤波器，通频带在 $f_{c1}=5\text{kHz}$ 和 $f_{c2}=6.5\text{kHz}$ 之间，幅度为 2.5，和两个阻带频率 $f_{s1}=4.5\text{kHz}$ 和 $f_{s2}=7\text{kHz}$，幅度低于 0.025。采样频率是 20kHz。使用 Kaiser 窗。绘制幅度响应并验证设计是否符合要求。

5.37 设计一个带阻 FIR 滤波器，阻带在 $\omega_{s1}=0.35\pi$ 和 $\omega_{s2}=0.65\pi$ 之间，幅度为 0.05，两个通带频率 $\omega_{p1}=0.2\pi$ 和 $\omega_{p2}=0.8\pi$，幅度大于 0.95。使用 Kaiser 窗。绘制滤波器幅度响应。

5.38 设计一个等波纹低通 FIR 滤波器，通带截止频率 $\omega_c=0.25\pi$，$\delta_p=0.05$，阻带频率 $\omega_s=0.4\pi$，幅度小于 0.01。绘制幅度响应并验证设计是否符合要求。

5.39 使用题 5.38 中的结果和本章正文末描述的频率变换 B，设计一个等波纹高通 FIR 滤波器，绘制幅度响应。

5.40 使用上面得到的低通 FIR 滤波器结果和本章正文末描述的频率变换 C，设计一个等波纹低通 FIR 滤波器，绘制幅度响应。

5.41 设计一个等波纹高通 FIR 滤波器，通带截止频率 $\omega_c=0.45\pi$，$\alpha_p=0.15\text{dB}$，阻带频率 $\omega_s=0.2\pi$，幅度小于 0.025。

5.42 设计一个等波纹 FIR 带通数字滤波器，通带在 $\omega_{c1}=0.4\pi$ 和 $\omega_{c2}=0.6\pi$ 之间，幅度在 1.02 和 0.8 之间。阻带频率 $\omega_{s1}=0.2\pi$ 和 $\omega_{s2}=0.8\pi$，幅度小于 0.005。绘制幅度响应并验证是否符合设计要求。

5.43 设计一个带通 FIR 滤波器，通频带在 $f_{c1}=6\text{kHz}$ 和 $f_{c2}=7\text{kHz}$ 之间，$\alpha_p=0.2\text{dB}$，两个阻带频率 $f_{s1}=4\text{kHz}$ 和 $f_{s2}=9\text{kHz}$，$\alpha_s=35\text{dB}$。采样频率是 20kHz。绘制幅度响应并验证是否符合设计要求。

参考文献

1. T. Saramaki, Finite impulse response filter design, in *Handbook for Digital Signal Processing*, S. K. Mitra and J. F. Kaiser, eds., Wiley-Interscience, New York, 1993, Chapter 4, pp. 155–278.
2. T. W. Parks and J. H. McClellan, Chebyshev approximation of nonrecursive digital filters with linear phase, *IEEE Trans. Circuit Theory* **CT-19**, 189–194 (1972).
3. G. C. Temes and D. Y. F. Zai, Least p^{th} approximation, *IEEE Trans. Circuit Theory* **CT-16**, 235–237 (1969).
4. L. R. Rabiner and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
5. T. W. Parks and C. S. Burrus, *Digital Filter Design*, Wiley-Interscience, New York, 1987.
6. H. D. Helms, Nonrecursive digital filters: Design method for achieving specifications on frequency response, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-16**, 336–342 (Sept. 1968).
7. J. F. Kaiser, Nonrecursive digital filter design using the I_0-sinh window function, *Proc. 1974 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, April 1974, pp. 20–23.
8. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing—A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, New York, 2001.
9. S. K. Mitra and J. F. Kaiser, eds., *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1993.
10. O. Herrmann, L. R. Rabiner and D. S. K. Chan, "Practical design rules for optimum finite impulse response lowpass digital filters", *Bell System Tech. Journal*, vol. 52, pp. 769–799, 1973.
11. F. J. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with discrete Fourier transform", *Proc. IEEE*, 66, pp. 51–83, 1978.
12. J. K. Gautam, A. Kumar, and R. Saxena, "Windows: A tool in signal processing", *IETE Technical Review*, vol. 12, pp. 217–226, 1995.
13. Andreas Antoniou, *Digital Filters: Analysis, Design and Applications*, McGraw Hill, 1993.
14. Andreas Antoniou, "New improved method for the design of weighted-Chebyshev, non-recursive, digital filters", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-30, pp. 740–750, 1983.
15. R. W. Hamming, *Digital Filters*, Prentice-Hall, 1977.
16. J. H. McClellan and T. W. Parks, "A unified approach to the design of optimum FIR linear phase digital filters" *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-20, pp. 697–701, 1973.
17. A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
18. P. P. Vaidyanathan, "On maximally-flat linear phase FIR filters" *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-31, pp. 830–832, 1989.

第 6 章　滤波器实现

6.1　简介

一旦我们得到一个与频域或时域设计技术要求近似的 FIR 或 IIR 滤波器传递函数，在决定用于实际实现或应用的最优或子优算法之前，下一步是尽可能地研究多种滤波器的结构。一个给定的传递函数可以通过几种结构或我们称之为“电路”的来实现，在一定意义上它们都是等价的，它们在无限精度传递函数系数假设下实现同一传递函数。但在现实中，用硬件实现传递函数的算法取决于选择实现传递函数的滤波器结构。也必须牢记，真正的硬件用有限数量的位数表示滤波器的系数，输入端输入信号的输入值也如此。乘法器与加法器输入信号和输出信号都由有限位数表示。信号值加法和乘法的舍入或截断的影响取决于二进制数的表达类型，无论它们是定点还是浮点形式，或无论它们是否是正负极性或二进制互补形式。所有这些在硬件实现中使用有限位数运算的影响通常被称为“有限字长效应”，这将在第 7 章研究。

在本章，我们通过使用不同结构开发几种实现 FIR 和 IIR 滤波器的方法。任何传递函数的分析或仿真都可以轻松地在一台通用计算机、个人计算机，或者工作站上使用高位数数据完成。我们还可以在个人计算机上研究非因果系统或不稳定系统的性能。一个实际微处理器或一个数字信号处理器（DSP 芯片）性能仿真通过将它连接到 PC 上进行，一个包含微处理器或 DSP 芯片的开发套件远比设计和构建不同有限字长的数字滤波器硬件和测试其性能更受人喜欢。当然基于其他准则的滤波器功能的广泛分析（仿真）如稳定性、模块性、流水线结构与抗噪声能力，可以使用功能强大的软件在个人计算机或工作站上完成，这在当今都是可行的。

没错，一个实时的硬件通过将表示输入信号和滤波器系数的数据存储在内存中编程，可以实现大量的算法。但请记住，它只能在时间域实现一个算法，而算法编程实现频率响应仅仅是仿真。在前面章节中讨论的三种时间域算法是递归算法、卷积求和与 FFT 算法。描述这些算法的差分方程要由真正的数字硬件来实现。

以一个通用的 IIR 滤波器函数为例：

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b(n) z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a(n) z^{-n}} \tag{6.1}$$

对应直接实现的线性差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b(k) x(n-k); \qquad a(0) = 1 \tag{6.2}$$

那么，重写的递归算法形式如下：

$$\begin{aligned} y(n) = & -a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + a(3)y(n-3) + \cdots + a(N)y(n-N) \\ & + b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \cdots + b(M)x(n-M)^{\ominus} \end{aligned} \tag{6.3}$$

这个递归算法可以很容易地在通用微处理器、计算机，或者一个功能完整的 DSP 芯片上编程实现。我们得到的滤波器函数可以在这些装置上构建，单位冲激响应 $h(n)$ 和输入信号之间的卷积结果就是实际硬件过程产生的输出。卷积求和如下：

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k) \tag{6.4}$$

在接下来页面中，将说明传递函数式（6.1）可以由几种结构实现。一定要记住，在时域实现它们的算法因结构将会有所不同。所有实现相同传递函数的等价结构都是在无限精度系数条件下；否则它们的性能取决于表示系数的位数，也就是输入信号及表示的二进制数形式。在下一节中可能出现 FIR 滤波器函数实现的相同描述。实现不同结构的目的和研究量化影响的目的是寻找对系统输出有最小量化影响的结构。

6.2　FIR 滤波器的实现

例 6.1：直接形式

给定一个 FIR 滤波器传递函数，如 $H(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n) z^{-n}$，考虑其等效算法的输出，例如，当 $M=4$ 时：

$$\begin{aligned} y(n) = & h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) \\ & + h(3)x(n-3) + h(4)x(n-4) \end{aligned} \tag{6.5}$$

在第 5 章已经讨论了实现该算法的一种结构，因为其乘法器系数 [即 $H(z)$ 中的 $h(n)$] 可以直接得到，这就是所谓的直接 I 型结构，如图 6.1 所示。

只要有一个实现 FIR 或 IIR 滤波器的结构，就可以通过以下转置及操作得到等价结构。

⊖ 公式最后一项原书为 $b(M)y(n-M)$，有误。——译者注

1）交换输入和输出节点；

2）用分支节点替换加法器，反之亦然；

3）反转所有路径。

使用这些操作，得到图 6.1 的转置结构如图 6.2 所示。这就是所谓的直接Ⅱ型结构；记住，这种（直接Ⅱ型）结构在下一章称为直接Ⅰ型的转置结构。

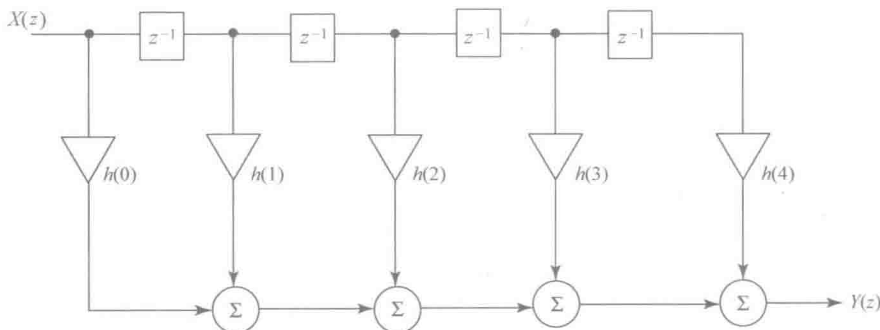


图 6.1 一个 FIR 滤波器的直接Ⅰ型结构

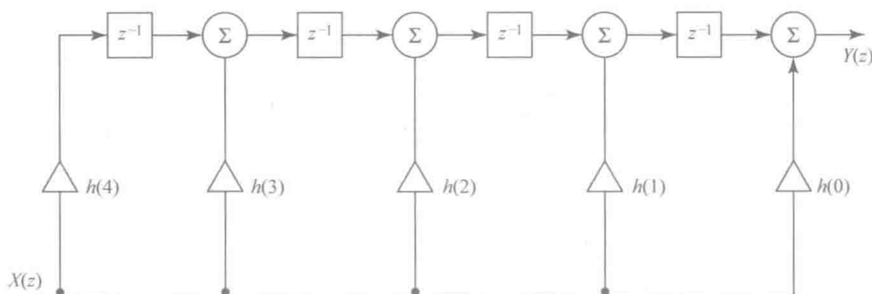


图 6.2 一个 FIR 滤波器的直接Ⅱ型结构

例 6.2：级联形式

如果有一个高阶 FIR 滤波器，它可以用低阶 FIR 滤波器级联形式实现，当阶数是偶数时，最好是二阶滤波器，当阶数是奇数时，选择二阶滤波器和一阶滤波器级联实现。分解 FIR 滤波器函数 $H(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n)z^{-n}$ 为形式

$$H(z) = \begin{cases} h(0)\left\{\prod_{m=1}^{M/2}[1 + h(1m)z^{-1} + h(2m)z^{-2}]\right\} & M\text{ 是偶数} \\ h(0)\left\{[1 + h(10)z^{-1}]\prod_{m=1}^{(M-1)/2}[1 + h(1m)z^{-1} + h(2m)z - 2]\right\} & M\text{ 是奇数} \end{cases} \tag{6.6}$$

$M=5$ 时这个方程的级联实现如图 6.3 所示，其转置形式如图 6.4 所示。

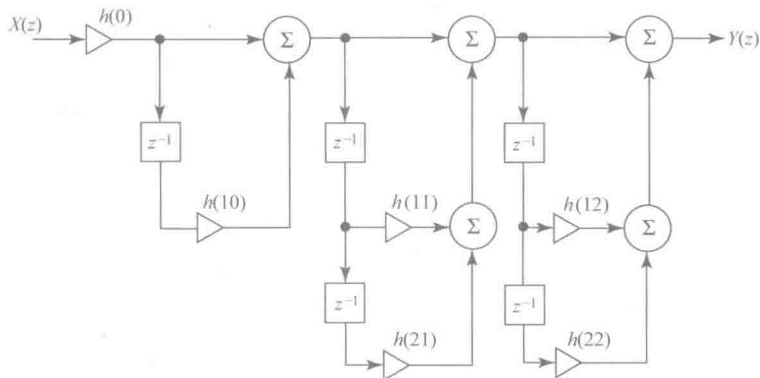


图 6.3　一个 FIR 滤波器的级联

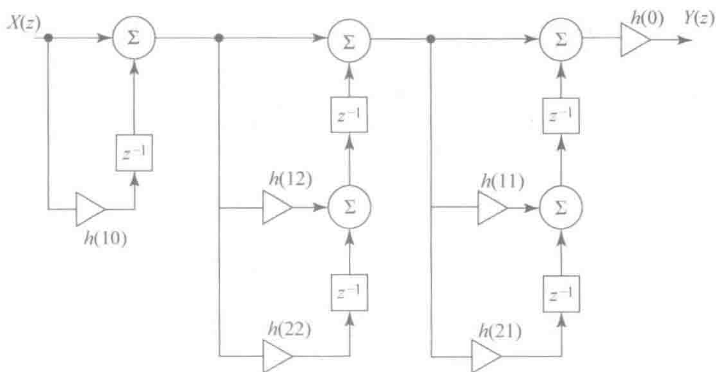


图 6.4　图 6.3 所示级联结构的转置

例 6.3：多相形式

这个实现是基于 FIR 传递函数多相分解，如下面的例子所示：

$$\begin{aligned} H_1(z) &= h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}+h(4)z^{-4} \\ &\quad +h(5)z^{-5}+h(6)z^{-6}+h(7)z^{-7}+h(8)z^{-8} \end{aligned} \tag{6.7}$$

这可以表达为两个子函数的总和，如下所示：

$$\begin{aligned} H_1(z) &= [h(0)+h(2)z^{-2}+h(4)z^{-4}+h(8)z^{-8}] \\ &\quad +[h(1)z^{-1}+h(3)z^{-3}+h(5)z^{-5}+h(7)z^{-7}] \\ &= [h(0)+h(2)z^{-2}+h(4)z^{-4}+h(8)z^{-8}] \\ &\quad +z^{-1}[h(1)+h(3)z^{-2}+h(5)z^{-4}+h(7)z^{-6}] \end{aligned} \tag{6.8}$$

记$A_0(z)=[h(0)+h(2)z^{-2}+h(4)z^{-4}+h(8)z^{-8}]$及

$$\begin{aligned}A_1(z)&=[h(1)z^{-1}+h(3)z^{-3}+h(5)z^{-5}+h(7)z^{-7}]\\&=z^{-1}[h(1)+h(3)z^{-2}+h(5)z^{-4}+h(7)z^{-6}]\end{aligned}$$

由于方括号中是偶数项，我们表示$A_0(z)=A_0(z^2)$和$A_1(z)=z^{-1}A_1(z^2)$。这里表达$H_1(z)=A_0(z^2)+z^{-1}A_1(z^2)$。实现的框图如图 6.5a 所示，其中两个函数$A_0(z^2)$和$A_1(z^2)$是并联子滤波器。

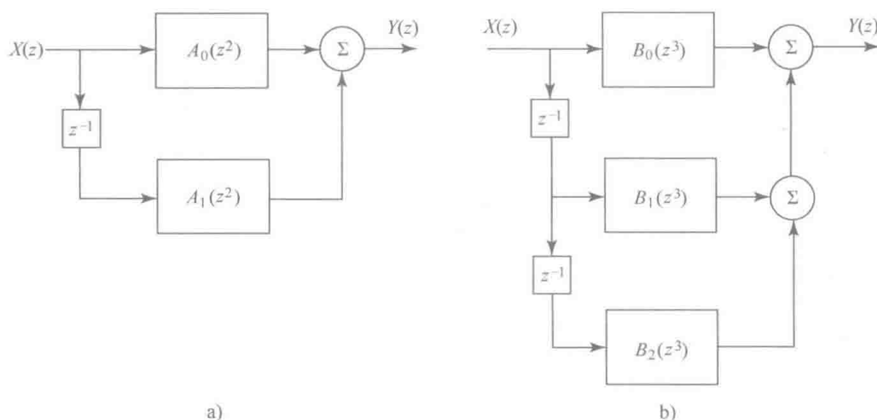


图 6.5 FIR 滤波器多相结构

这些滤波器可以用如前描述的直接Ⅰ型和直接Ⅱ型分别实现，见图 6.1 和图 6.2。然而构建$A_0(z)$有 8 个单位延迟，构建$z^{-1}A_1(z)$有 7 个单元延迟，加起来有 15 个单元延迟。我们更喜欢用延迟单元少的电路实现，它等价于滤波器的阶数。包含最小延迟单元数的实现被定义为一个标准实现。为减少到 8 个延迟单元数，让两个子滤波器共享延迟单元，以得到一个标准实现。这样的电路实现如图 6.6 所示。

例 6.4

考虑同一例子，并分解式（6.7）为 3 项之和：

$$\begin{aligned}H(z)&=[h(0)+h(3)z^{-3}+h(6)z^{-6}]+z^{-1}[h(1)+h(4)z^{-3}+h(7)z^{-6}]\\&\quad+z^{-2}[h(2)+h(5)z^{-3}+h(8)z^{-6}]\\&=B_0(z^3)+z^{-1}B_1(z^3)+z^{-2}B_2(z^3)\end{aligned}\tag{6.9}$$

实现这种分解的框图如图 6.5b 所示。式（6.9）的典型实现如图 6.7 所示，它的转置如图 6.8 所示，每个使用 8 个延迟单元。式（6.7）FIR 滤波器阶数选择为 8，可以分解为 4 个子滤波器，形式为$H(z)=C_0(z^4)+C_1(z^4)+C_2(z^4)+C_3(z^4)$，

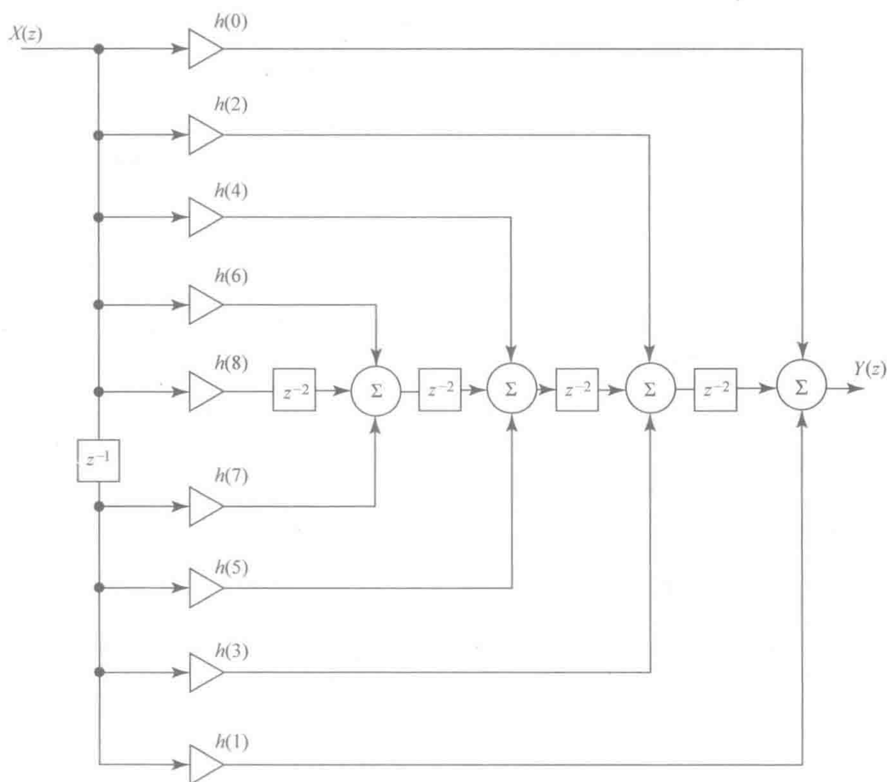


图 6.6　FIR 滤波器 $H_1(z)$ 的多相实现

而且可以用典型电路实现。

一般来说，一个 N 阶 FIR 函数［即 $h(n)=0$，若 $n>N$］可以分解成 M 个子滤波器并行联结的多相形式，如下：

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} E_m(z^M) \tag{6.10}$$

这里

$$E_m(z)=\sum_{n=0}^{(N+1)/M} h(Mn+m) z^{-n} \tag{6.11}$$

6.2.1　FIR 滤波器网格结构

FIR 滤波器可以用网格结构实现，如图 6.17a 所示，其转置如图 6.17b 所示，为一个三阶滤波器的例子。我们将在 6.5 节描述使用 MATLAB 函数进行这种结构的设计。

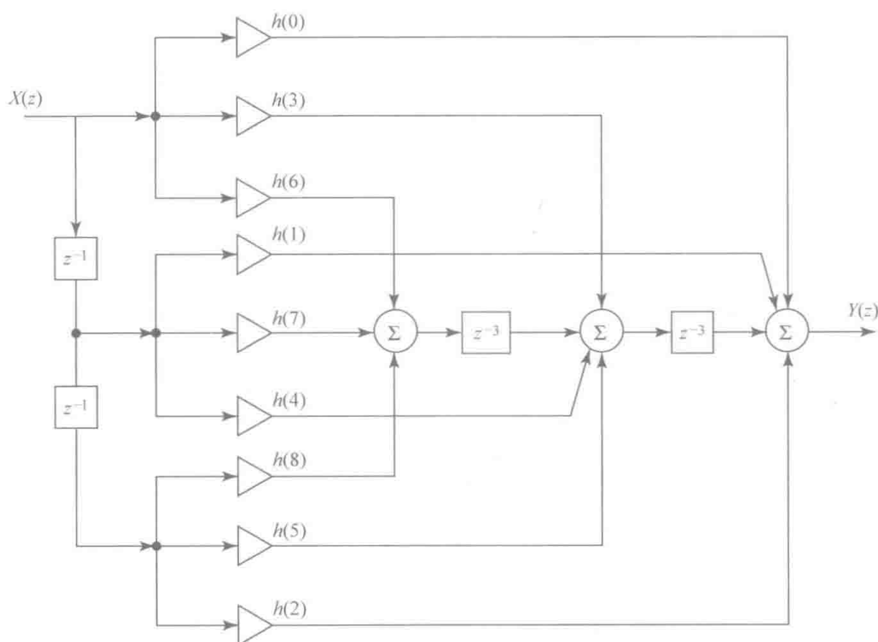


图 6.7　FIR 滤波器 $H_2(z)$的多相结构

6.2.2　线性相位 FIR 滤波器实现

当 FIR 滤波器具有线性相位时，其系数对称或反对称，这样乘法器的数量减少了近一半。对称型 FIR N 阶滤波器，单位冲激响应样本数与乘法器系数数量一致，满足 $h(n)=h(N-n)$，被称为Ⅰ型 FIR 滤波器。具有反对称系数的 FIR 滤波器满足条件 $h(n)=-h(N-n)$，被称为Ⅱ型 FIR 滤波器。

例 6.5

以一个Ⅰ型 FIR 过滤器为例，其阶数 $N=6$：

$$H_3(z)=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}+h(4)z^{-4}+h(5)z^{-5}+h(6)z^{-6} \tag{6.12}$$

$$=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}+h(2)z^{-4}+h(1)z^{-5}+h(0)z^{-6}$$

$$=h(0)(1+z^{-6})+h(1)(z^{-1}+z^{-5})+h(2)(z^{-2}+z^{-4})+h(3)z^{-3} \tag{6.13}$$

通过共享乘法器，得到如图 6.9 所示，它仅使用 4 个乘法器。有 6 个延迟单元，仍然是一个标准实现。

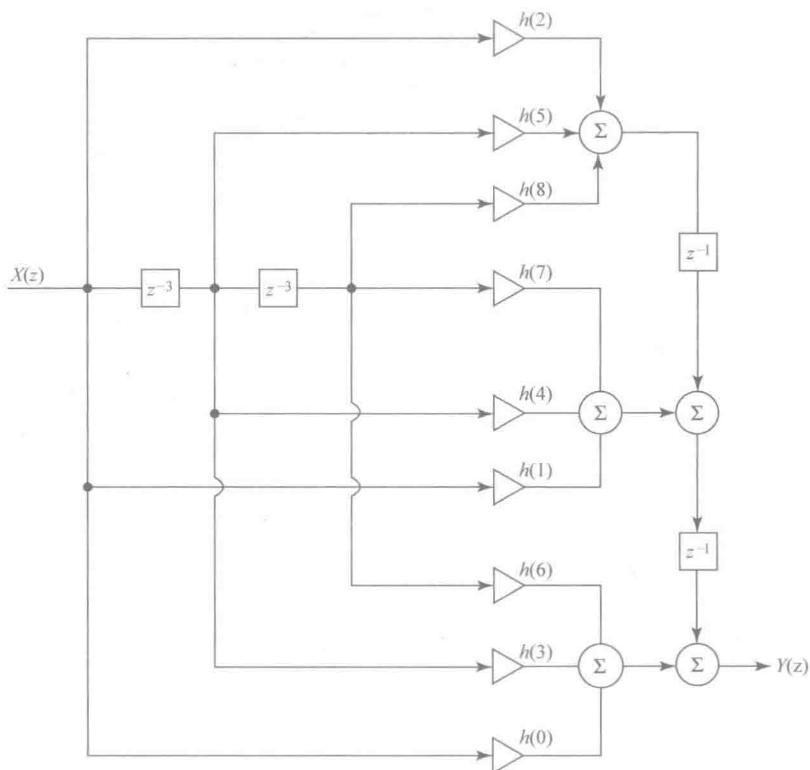


图 6.8　图 6.7 所示多相结构的转置

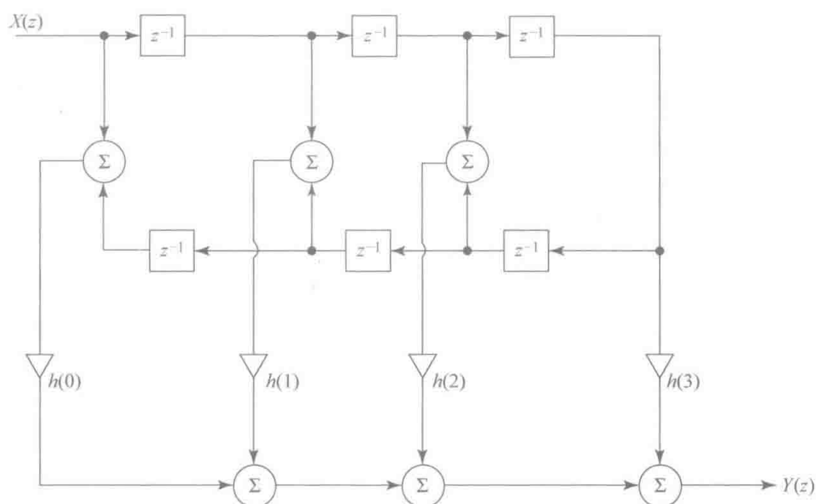


图 6.9　Ⅰ型线性相位滤波器函数 $H_3(z)$ 的直接型结构

例 6.6

考虑一个Ⅱ型 FIR 滤波器，阶数为 7，其传递函数为

$$H_4(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + h(3)z^{-4} + h(2)z^{-5} + h(1)z^{-6} + h(0)z^{-7} \tag{6.14}$$

$$= h(0)(1 + z^{-7}) + h(1)(z^{-1} + z^{-6}) + h(2)(z^{-2} + z^{-5}) + h(3)(z^{-3} + z^{-4}) \tag{6.15}$$

其用标准电路实现如图 6.10 所示，乘法器数量从 7 减到 4。同样可用反对称系数实现 FIR 滤波器，达到节约成本的目的。

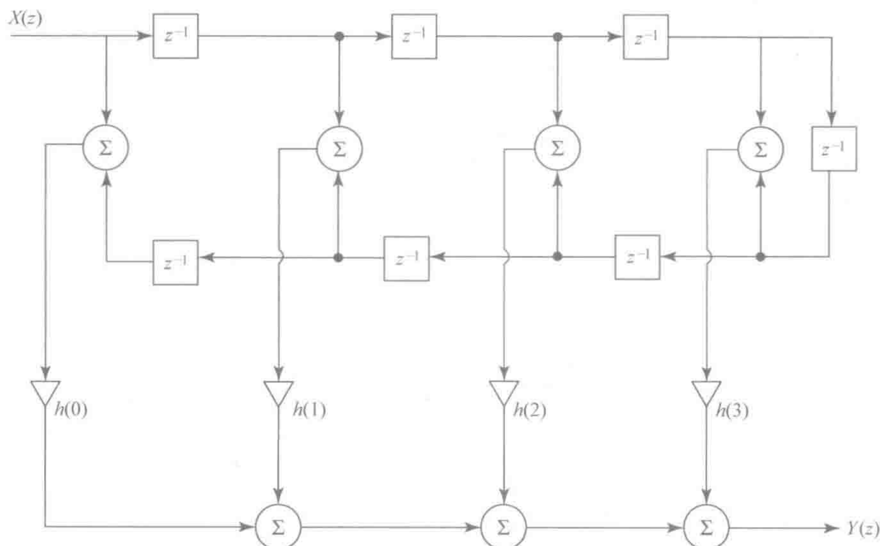


图 6.10 Ⅱ型线性相位 FIR 滤波器函数 $H_4(z)$ 的直接型结构

6.3 IIR 滤波器实现

在构建一个 FIR 滤波器的几个等价结构中，我们使用滤波器传递函数直接形式分解为二阶部分，作为级联、多相分解及转置各结构中的二阶部分乘积。使用线性相位 FIR 滤波器系数对称性减少延迟单元的数量。也可以生成其他转置形式。用类似的策略，本节讨论几个 IIR 滤波器结构。

例 6.7：直接形式

一个 IIR 滤波器传递函数［见式（6.1）］是分子分母多项式的比率。首先将其分解一个包含所有极点的函数 $H_1(z)$ 与一个多项式 $H_2(z)$ 的积的形式

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b(n)z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{N} a(n)z^{-n}} \tag{6.16}$$

$$= H_1(z)H_2(z) = \left[\frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} a(n)z^{-n}}\right]\left[\sum_{n=0}^{M} b(n)z^{-n}\right] \tag{6.17}$$

而且构造一个 FIR 滤波器 $H_2(z)$ 与全极点 IIR 滤波器 $H_1(z)$ 级联连接。现选择一个例子来说明该方法。令 $H_2(z) = b_0 + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + b(3)z^{-3}$ 和 $H_1(z) = \frac{1}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2} + a(3)z^{-3}}$

$H_1(z)$ 的直接 I 型实现如图 6.11 所示，作为级联中 FIR 滤波器 $H_2(z)$ 直接形式 I 型实现的级联连接。IIR 滤波器的结构也被称为直接 I 型，因为乘法器的增益常数可以直接从传递函数系数得到。

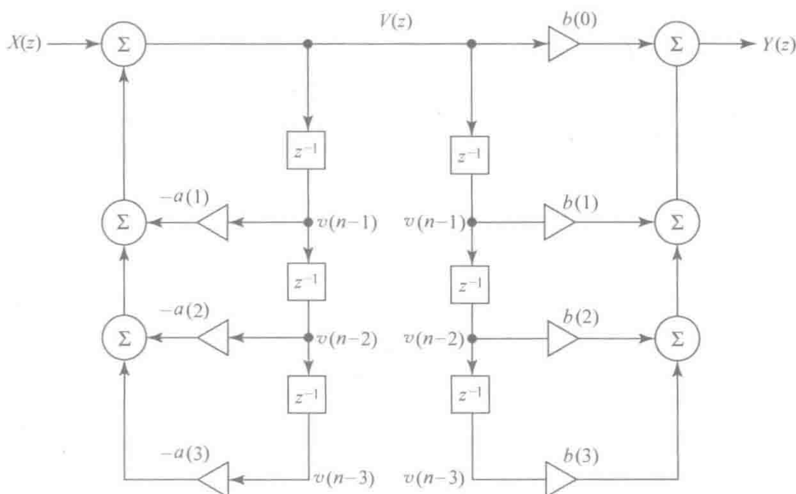


图 6.11　一个 IIR 滤波器直接 I 型

注意到 $H_1(z) = V(z)/X(z)$ 和 $H_2(z) = Y(z)/V(z)$。还注意到 $H_1(z)$ 滤波器 3 个延迟单元的输出信号与滤波器 $H_2(z)$ 3 个延迟单元的输出相同。因此让两个电路共享一个三延迟单元集，从而减少延迟单元的数量。合并这两个电路，结果如图 6.12 所示，被确定为 IIR 滤波器直接Ⅱ型实现。其转置图如图 6.13 所示。它们使用最小数量的延迟单元等于 IIR 滤波器的阶数，因此是典型实现。

这两个滤波器实现 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 可以用相反顺序级联［即 $H(z) = H_2(z)H_1(z)$］，当它们调换后，我们看到 $H_2(z)$ 的 3 个延迟单元可以与 $H_1(z)$ 共享，从而

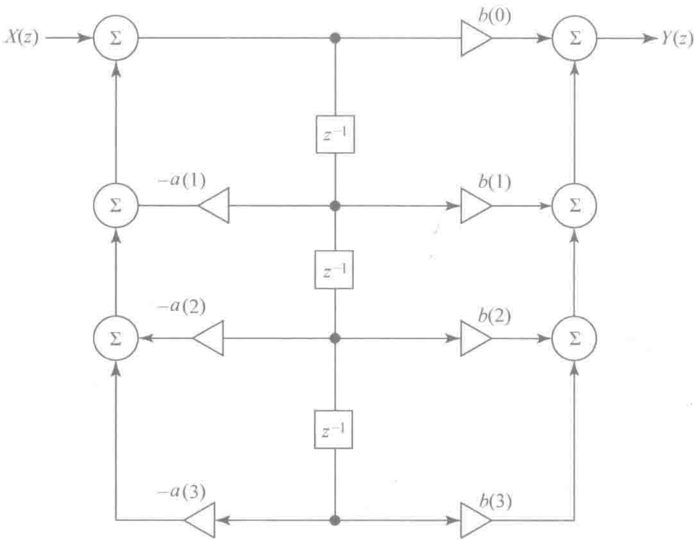


图 6.12　直接Ⅱ型 IIR 滤波器的结构

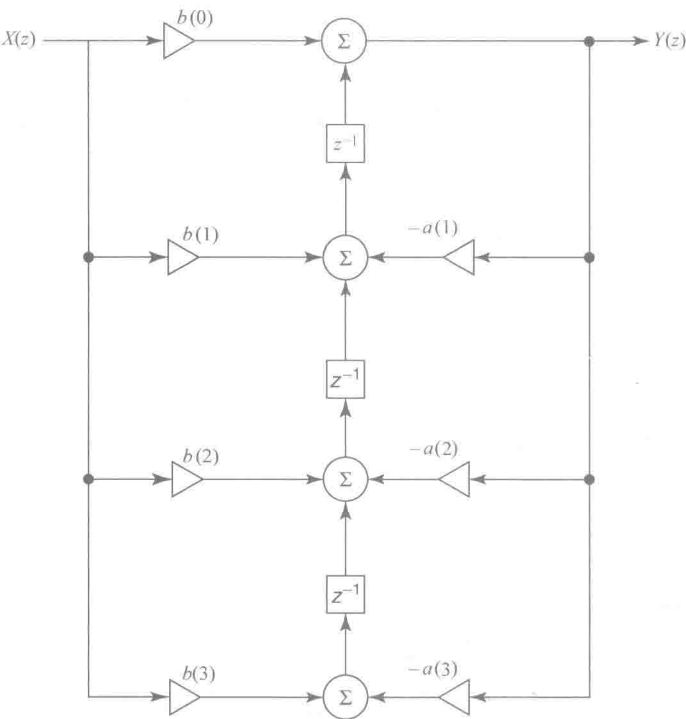


图 6.13　一个 IIR 滤波器直接Ⅱ型转置结构

利用调换实现另一种等同的直接Ⅰ型结构。

例6.8：级联形式

滤波器函数［见式（6.16）］可以分解为传递函数的乘积形式

$$H(z)=\frac{N_1(z)N_2(z)\cdots N_K(z)}{D_1(z)D_2(z)D_3(z)\cdots D_K(z)} \tag{6.18}$$

$$=\left[\frac{N_1(z)}{D_1(z)}\right]\left[\frac{N_2(z)}{D_2(z)}\right]\left[\frac{N_3(z)}{D_3(z)}\right]\cdots\left[\frac{N_K(z)}{D_K(z)}\right] \tag{6.19}$$

$$=H_1(z)H_2(z)H_3(z)\cdots H_K(z) \tag{6.20}$$

当N为偶数时，$K=N/2$和多项式$D_1(z)$、$D_2(z)$、$D_3(z)$等均为二阶多项式，对任何这样的多项式，复零点共轭成对出现。当N是奇数时，$K=(N-1)/2$，其中一个分母多项式是一阶多项式。分子多项式$N_1(z)$、$N_2(z)$，…是一阶或二阶多项式或是一个常数：

$$H(z)=H_0\left(\frac{1+\beta_{11}z^{-1}}{1+\alpha_{11}z^{-1}}\right)\prod_k\left(\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}\right) \tag{6.21}$$

每个递输函数$H_1(z)$，$H_2(z)$，…，$H_k(z)$用直接Ⅰ型或直接Ⅱ型或它们的转置结构实现，然后进行级联。它们也可以用其他顺序级联，例如，$H(z)=H_1(z)H_3(z)H_5(z)\cdots$或$H(z)=H_2(z)H_1(z)H_4(z)H_3(z)\cdots$。

除了上述提到的，实现$H(z)$级联连接还有更多选择。可以使用多种组合配对分子$N_1(z)$、$N_2(z)$、$N_3(z)$、…和分母$D_1(z)$，$D_2(z)$，$D_3(z)$，…。换句话说，可以使用不同方式配对多项式的零点和极点。例如，可以定义

$$H(z)=\left[\frac{N_1(z)}{D_2(z)}\right]\left[\frac{N_2(z)}{D_3(z)}\right]\left[\frac{N_3(z)}{D_4(z)}\right]\cdots\left[\frac{N_K(z)}{D_1(z)}\right]$$

$$=\left[\frac{N_2(z)}{D_1(z)}\right]\left[\frac{N_3(z)}{D_4(z)}\right]\left[\frac{N_4(z)}{D_3(z)}\right]\cdots\left[\frac{N_K(z)}{D_2(z)}\right]$$

$$=\left[\frac{N_K(z)}{D_1(z)}\right]\left[\frac{N_2(z)}{D_3(z)}\right]\left[\frac{N_4(z)}{D_2(z)}\right]\cdots$$

再使用许多不同的阶数级联它们。

因此，一般来说，从名义上的IIR传递函数能获得的实现数量是非常大的。除了每个实现算法的差异和滤波器系数与信号样本被量化到有限位数时的有限字长效应，我们还要考虑到每个级联阶段输出序列综合幅度影响及输出序列幅度标定的需要。

例 6.9

考虑一个 IIR 滤波器简单例子：

$$H(z)=\frac{z(0.16z-0.18)}{(z-0.2)(z+0.1)(z+0.4)(z^2+z+0.5)} \tag{6.22}$$

一些可替代的表达形式如下：

$$H(z)=\left(\frac{1}{z^2-0.1z-0.02}\right)\left(\frac{0.16z-0.18}{z^2+z+0.5}\right)\left(\frac{z}{z+0.4}\right) \tag{6.23}$$

$$=\left(\frac{z}{z+0.4}\right)\left(\frac{1}{z^2-0.1z-0.02}\right)\left(\frac{0.16z-0.18}{z^2+z+0.5}\right)$$

$$=\left(\frac{0.16z-0.18}{z^2-0.1z-0.02}\right)\left(\frac{z}{z^2+z+0.5}\right)\left(\frac{1}{z+0.4}\right)$$

$$=\left(\frac{z}{z^2+z+0.5}\right)\left(\frac{1}{z+0.4}\right)\left(\frac{0.16z-0.18}{z^2-0.1z-0.02}\right) \tag{6.24}$$

选择最后一个表达式（6.24），并用 z 的逆形式重写

$$H(z^{-1})=\left(\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}\right)\left(\frac{z^{-1}}{1+0.4z^{-1}}\right)\left(\frac{0.16z^{-1}-0.18z^{-2}}{1-0.1z^{-1}-0.02z^{-2}}\right) \tag{6.25}$$

实现该传递函数的一个实现如图 6.14 所示。

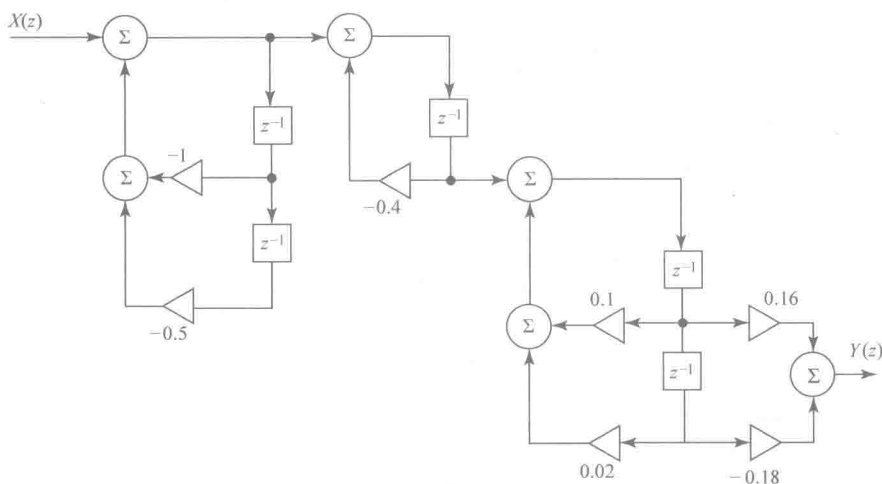


图 6.14 IIR 滤波器的级联

不是将分母表达式（6.22）中的（$z-0.2$）和（$z+0.1$）组合得到（$z^2-0.1z-0.02$），而是结合（$z-0.2$）和（$z+0.4$）或者（$z+0.1$）和（$z+0.4$）产生新的二阶多项式，并选择多个零－极点对及级联中连接的二阶阶数，式（6.22）增加了许多可能的级联实现形式。二阶分级的串联连接用直接Ⅱ型实现一直是一个受欢迎的选择，而且研究得较详细，一直到具有较好有限字长效应及实际应用性能的其他结构出现。

例6.10：并联形式

IIR传递函数也可以扩展为二阶结构的求和形式。它分解成部分分式形式，复共轭极点组合在一起以便只有实系数的扩展项。选择相同的例子（6.22）来说明这种形式的实现。

式（6.22）部分分式扩展的一种形式是

$$H(z)=\frac{5.31165z}{z+0.1}-\frac{1.111z}{z-0.2}-\frac{5.21368z}{z+0.4}+\frac{1.1314z^2-0.15947z}{z^2+z+0.5} \tag{6.26}$$

通过结合（$z+0.1$）、（$z-0.2$）、（$z+0.4$）成不同对，获得对应的分母多项式，得到上述传递函数的以下表达式：

$$H(z)=\frac{0.9797z^2+1.6033z}{z^2+0.5z+0.04}-\frac{1.111z}{z-0.2}+\frac{1.1314z^2-0.15947z}{z^2+z+0.5} \tag{6.27}$$

$$=\frac{-6.3248z^2+0.5983z}{z^2+0.2z-0.08}+\frac{5.31165}{z+0.1}+\frac{1.1314z^2-0.15947z}{z^2+z+0.5} \tag{6.28}$$

$$=\frac{4.200z^2-1.1173z}{z^2-0.1z-0.02}-\frac{5.2134z}{z+0.4}+\frac{1.1314z^2-0.15947z}{z^2+z+0.5} \tag{6.29}$$

这些表达式中三项被重写成z的逆次形式，而且任何一个IIR实现（直接形式或它们的转置）用于得到它们的电路，进行并联连接。选择最后一个表达式：

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{4.200z^2-1.1173z}{z^2-0.1z-0.02}-\frac{5.2134z}{z+0.4}+\frac{1.1314z^2-0.15947z}{z^2+z+0.5}\\&=\frac{4.200-1.117z^{-1}}{1-0.1z^{-1}-0.02z^{-2}}-\frac{5.2134z}{1+0.4z^{-1}}+\frac{1.1314-0.15947z^{-1}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}\end{aligned} \tag{6.30}$$

图6.15显示了式（6.30）使用并联形式的一个滤波器实现，并通过使用每个部分的转置，得到一个新电路。

扩展传递函数另一种形式是部分分式扩展的标准形式，如下表示：

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{R_1}{z+0.1}+\frac{R_2}{z-0.2}+\frac{R_3}{z+0.4}+\frac{R_4z+R_5}{z^2+z+0.5}\\&=\frac{R_1z^{-1}}{1+0.1z^{-1}}+\frac{R_2z^{-1}}{1-0.2z^{-1}}+\frac{R_3z^{-1}}{1+0.4z^{-1}}+\frac{R_4z^{-1}+R_5z^{-2}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}\end{aligned} \tag{6.31}$$

这产生了另外的结构。

所以，式（6.22）给出的传递函数被分解成式（6.25）的形式，级联结构实现如图 6.14 所示，它被分解成式（6.30）形式，并行连接实现结构如图 6.15 所示。

实现图 6.14 结构的算法形式如下：

$$y_1(n)=x(n)-y_1(n-1)-0.5y_1(n-2)$$
$$y_2(n)=y_1(n)-0.4y_2(n-1)$$
$$y_3(n)=y_2(n)+0.1y_3(n-1)+0.02y_3(n-2)$$
$$y(n)=0.16y_3(n-1)-0.18y_3(n-2)$$

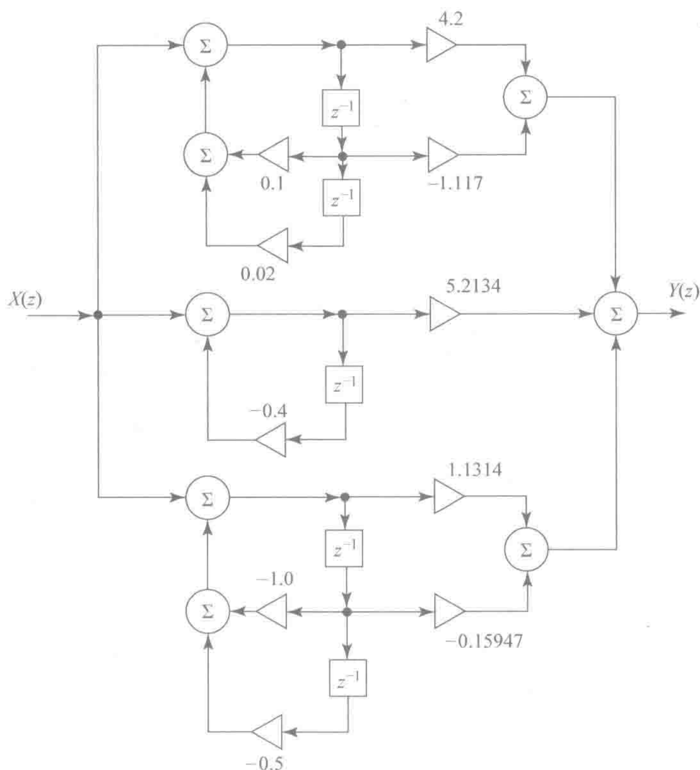


图 6.15 IIR 滤波器函数 $H(z)$ 的并行连接

而实现图 6.15 结构使用的算法有如下形式：

$$\tilde{y}_1(n)=x(n)+0.1\tilde{y}_1(n-1)+0.02\tilde{y}_1(n-2)$$
$$\tilde{y}_2(n)=4.2\tilde{y}_1(n)-1.117\tilde{y}_1(n-1)$$
$$\tilde{y}_3(n)=x(n)-0.4\tilde{y}_3(n-1)$$

$$\tilde{y}_4(n) = x(n) - \tilde{y}_4(n-1) - 0.5\tilde{y}_4(n-2)$$

$$\tilde{y}_5(n) = 1.1314\tilde{y}_4(n) - 0.15947\tilde{y}_4(n-1)$$

$$y(n) = \tilde{y}_2(n) + 5.2134\tilde{y}_3(n) + \tilde{y}_5(n)$$

记住，在理想条件下两种算法对给定输入信号产生相同的输出，两个结构实现相同的传递函数式（6.22）。但是，当两个算法通过编程与硬件装置实现时，结果会非常不同，结果输出的准确性、执行的速度和吞吐量及其他因素将不仅取决于有限字长度，还取决于其他很多因素，包括 DSP 芯片的体系结构、每周期程序指令数和输入信号的动态范围。我们将在后面章节讨论这些因素。

6.4 并行全通滤波器

下一个重点是图 6.16 所示的结构。传递函数 $G(z) = Y(z)/X(z)$ 是由 $[A_1(z) + A_2(z)]/2$ 的形式给出，这里 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 是并联连接全通滤波器。但在本图中，有另一个传递函数，$H(z) = V(z)/X(z)$，$H(z) = [A_1(z) - A_2(z)]/2$。图 6.16 所示的结构也被称为网格结构或一些作者称为网格 - 耦合全通结构。一个典型的全通滤波函数如下：

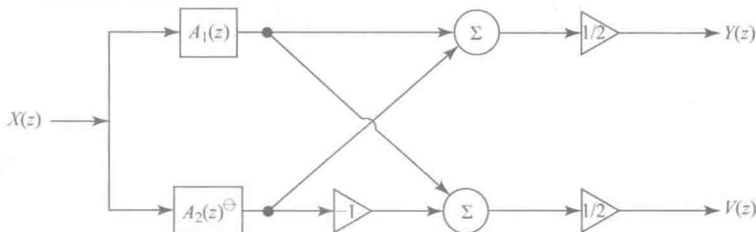


图 6.16　两个并联全通滤波器（网格 - 耦合全通结构）

$$A(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \pm\frac{a_n + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1}z^{-n+1} + a_n z^{-n}} \quad (6.32)$$

当分子和分母多项式都按照 z 阶数降序排列时，这里分子分母显示的系数顺序正好相反。方程式（6.32）可以表达为另一种形式：

$$A(z) = \frac{z^{-n}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n)}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1}z^{-n+1} + a_n z^{-n}}$$

$$= \frac{z^{-n}D(z^{-1})}{D(z)} \quad (6.33)$$

分子多项式 $D(z^{-1})$ 的零点是分母 $D(z)$ 零点的倒数，因此分子多项式 $D(z^{-1})$ 是分母多项式 $D(z)$ 的镜像。

㊀ 原书此处为 $A_1(z)$，有误。——译者注

当全通滤波器所有极点在 z 平面上的单位圆内时，它是一种稳定函数，而且是单位圆外零点的镜像对称点。

因此一个稳定的全通滤波函数是一个非最小相位函数。

令 $a_0=1$，我们得到了这种滤波器的幅度响应在所有频率点是一个常数，因为分子是分母的复共轭。因为此滤波器用相同的增益传送所有的频率，它被称为一个全通滤波器：

$$|A(e^{j\omega})| = \left|\frac{1+a_1e^{j\omega}+a_2e^{j2\omega}+\cdots+a_ne^{jn\omega}}{1+a_1e^{-j\omega}+a_2e^{-j2\omega}+\cdots+a_ne^{-jn\omega}}\right| = 1 \tag{6.34}$$

但相位响应（和群延迟）依赖于全通滤波器系数。我们知道逼近指定幅度要求的滤波器相位响应是 ω 的非线性函数，因此它的群延迟远非一个常数值。当一个全通滤波器与这样一个滤波器级联时，产生的滤波器频率响应 $H_1(e^{j\omega})A(e^{j\omega}) = |H_1(e^{j\omega})A(e^{j\omega})|e^{j[\theta(\omega)+\phi(\omega)]} = |H_1(e^{j\omega})|e^{j[\theta(\omega)+\phi(\omega)]}$。所以，当 IIR 滤波器级联全通滤波器时，幅度响应不会改变，但它的相位响应 $\theta(\omega)$ 由于全通滤滤器产生附加相位 $\phi(\omega)$。因此，当它们与 $H_1(z)$ 级联时，全通滤波器 $A(z)$ 对改变滤波器的相位响应（和群延迟）非常有用，而不改变给定 IIR 滤波器 $H_1(z)$ 的幅度响应。然而，为使在 $H_1(z)$ 滤波器通带内 $H_1(z)A(z)$ 的群延迟非常接近一个常数而寻找全通滤波器 $A(z)$ 系数的方法，是一个高度非线性的问题，只有计算机辅助优化被用来解决此问题。通常 IIR 滤波器设计仅要求幅度，而其群延迟远非频率的线性函数。有许多要求恒定群延迟或一个线性相位响应的应用，在这种情况下，滤波器级联一个全通滤波器并不影响其幅度——常数除外，但这样设计可以弥补 IIR 滤波器的相位失真。全通滤波器这样设计的目的是与 IIR 滤波器级联，被称为延迟均衡器。

全通滤波器的一个重要特性是，如果字长系数变化，全通滤波器的频率幅度响应不会改变。回想一下，第 2 章分析了二阶全通滤波器，如果一个全通滤波器的传递函数是高阶的，它可以通过二阶滤波器和一阶全通滤波器级联实现。在本章后，我们将说明一些实现一阶全通滤波传递函数和二阶全通传递函数的例子，如图 6.23 和图 6.24 所示。

假定两个全通滤波器如图 6.16 所示，分别是 $(N-r)$ 阶和 r 阶，如下所述：

$$A_1(z) = \frac{z^{-(N-r)}D_1(z^{-1})}{D_1(z)} \tag{6.35}$$

和

$$A_2(z) = \frac{z^{-r}D_2(z^{-1})}{D_2(z)} \tag{6.36}$$

用 $G(z) = [A_1(z)+A_2(z)]/2$ 和 $H(z) = [A_1(z)-A_2(z)]/2$ 替代运算，得到

$$G(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-(N-r)}D_1(z^{-1})D_2(z) + z^{-r}D_2(z^{-1})D_1(z)}{D_1(z)D_2(z)}\right] \tag{6.37}$$

和

$$H(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-(N-r)}D_1(z^{-1})D_2(z) - z^{-r}D_2(z^{-1})D_1(z)}{D_1(z)D_2(z)}\right] \tag{6.38}$$

如果将它们表达为如下形式：

$$G(z) = \frac{P(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} p_n z^{-n}}{D(z)} \tag{6.39}$$

和

$$H(z) = \frac{Q(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N} q_n z^{-n}}{D(z)} \tag{6.40}$$

那么，能证明式（6.37）和式（6.38）满足下列条件。

性质 6.1：$P(z^{-1}) = z^N P(z)$。因此 $p_n = p_{N-n}$，即 $P(z)$ 的系数对称。

性质 6.2：$Q(z^{-1}) = -z^N Q(z)$。因此 $q_n = -q_{N-n}$，即 $Q(z)$ 的系数反对称。

性质 6.3：$P(z)P(z^{-1}) + Q(z)Q(z^{-1}) = D(z)D(z^{-1})$。因而

$$|G(e^{j\omega})|^2 + |H(e^{j\omega})|^2 = 1 \tag{6.41}$$

换句话说，$G(z)$ 和 $H(z)$ 呈指数互补对。在下一章，$G(e^{j\omega})$ 实现结构将被称为网格耦合全通滤波器，鉴于此特性，$H(e^{j\omega})$ 实现结构将被称为网格 - 耦合功率互补全通滤波器。

性质 6.4：

$$|G(e^{j\omega})| = \frac{1}{2}\left|e^{j\theta_1(\omega)} + e^{j\theta_2(\omega)}\right| = \frac{1}{2}\left|1 + e^{j[\theta_1(\omega)-\theta_2(\omega)]}\right| \leqslant 1 \tag{6.42}$$

其中 $A_1(e^{j\omega}) = e^{j\theta_1(\omega)}$ 和 $A_2(e^{j\omega}) = e^{j\theta_2(\omega)}$。

在下列分析中，将假定 $G(z)$ 和 $H(z)$ 满足上述 4 个条件和得出的结果可以用 $G(z) = [A_1(z) + A_2(z)]/2$ 和 $H(z) = [A_1(z) - A_2(z)]/2$ 获得。

考虑性质 6.3：$P(z)P(z^{-1}) + Q(z)Q(z^{-1}) = D(z)D(z^{-1})$。使用性质 6.1 和 6.2，得到

$$P(z)z^N P(z) - z^N Q(z)Q(z) = D(z)D(z^{-1}) \tag{6.43}$$

$$P^2(z) - Q^2(z) = D(z)z^{-N}D(z^{-1}) \tag{6.44}$$

$$[P(z) + Q(z)][P(z) - Q(z)] = z^{-N}D(z)D(z^{-1}) \tag{6.45}$$

从性质 6.1 和 6.2，我们有 $P(z^{-1}) + Q(z^{-1}) = z^N[P(z) - Q(z)]$，因此 $z^{-N}[P(z^{-1}) + (z^{-1})] = [P(z) - Q(z)]$，然后得到

$$[P(z) + Q(z)][P(z) - Q(z)] = P^2(z) - Q^2(z) \tag{6.46}$$

从式（6.44），我们有

$$P^2(z) - Q^2(z) = D(z)z^{-N}D(z^{-1}) \tag{6.47}$$

$$[P(z) + Q(z)]z^{-N}[P(z^{-1}) + Q(z^{-1})] = D(z)z^{-N}D(z^{-1}) \tag{6.48}$$

因此

$$[P(z) + Q(z)][P(z) - Q(z)] = z^{-N}D(z)D(z^{-1}) \tag{6.49}$$

这表明 $[P(z) - Q(z)]$ 的零点与 $[P(z) + Q(z)]$ 的零点互补。

人们已经发现，奇数阶巴特沃斯、切比雪夫、椭圆低通滤波器满足上述4个性质。第4章告诉我们，从模拟低通原型滤波器的双线性变换得到的传递函数 $G(z)$ 在单位圆上没有极点。换句话说，$D(z)$ 的零点在单位圆内，因此 $D(z^{-1})$ 的零点在单位圆外，因为它们的零点互为倒数。从式（6.49）看到，$[P(z) + Q(z)]$ 和 $[P(z) - Q(z)]$ 的零点不能在单位圆上。假设 $[P(z) + Q(z)]$ 有 r 个零点 $z_k(k = 1, 2, 3, \cdots, r)$ 在单位圆内和 $(N - r)$ 个零点 $z_j(j = r+1, r+2, \cdots, N)$ 在单位圆外。因此 $[P(z) - Q(z)]$ 有 r 个零点 ${z_k}^{-1}(k = 1, 2, 3, \cdots, r)$ 在单位圆外和 $(N - r)$ 零点 $z_j^{-1}(j = r+1, r+2, \cdots, N)$ 在单位圆内。因此，根据式（6.49），可以假设 $D(z)$ 所有零点在单位圆内，有如下形式：

$$D(z) = \left[\prod_{k=1}^{r}(1 - z^{-1}z_k)\prod_{j=r+1}^{N}(1 - z^{-1}z_j^{-1})\right] \tag{6.50}$$

和

$$\begin{aligned}[P(z) + Q(z)][P(z) - Q(z)] &= z^{-N}D(z)D(z^{-1}) \\ &= \left[\prod_{k=1}^{r}(1 - z^{-1}z_k)\prod_{j=r+1}^{N}(1 - z^{-1}z_j^{-1})\right] \\ &\quad \times \left[\prod_{k=1}^{r}(z^{-1} - z_k)\prod_{j=r+1}^{N}(z^{-1} - z_j^{-1})\right]\end{aligned} \tag{6.51}$$

这样我们确定

$$P(z) + Q(z) = \alpha\left[\prod_{k=1}^{r}(1 - z^{-1}z_k)\prod_{j=r+1}^{N}(z^{-1} - z_j^{-1})\right] \tag{6.52}$$

$$P(z) - Q(z) = \frac{1}{\alpha}\left[\prod_{k=1}^{r}(z^{-1} - z_k)\prod_{j=r+1}^{N}(1 - z^{-1}z_j^{-1})\right] \tag{6.53}$$

那么

$$G(z) + H(z) = \frac{P(z) + Q(z)}{D(z)} = \alpha\prod_{j=r+1}^{N}\left(\frac{z^{-1} - z_j^{-1}}{1 - z^{-1}z_j^{-1}}\right) = \alpha A_1(z) \tag{6.54}$$

$$G(z) - H(z) = \frac{P(z) - Q(z)}{D(z)} = \frac{1}{\alpha}\prod_{k=1}^{r}\left(\frac{z^{-1} - z_k}{1 - z^{-1}z_k}\right) = \frac{1}{\alpha}A_2(z) \tag{6.55}$$

但从幂次的互补性质，一定有 $\alpha^2 = 1$。因此，$\alpha = 1$，从而

$$G(z) = \frac{1}{2}[A_1(z) + A_2(z)] \tag{6.56}$$

$$H(z) = \frac{1}{2}[A_1(z) - A_2(z)] \tag{6.57}$$

所以我们证明当 $G(z)$ 是奇数阶巴特沃斯、切比雪夫或者椭圆低通滤波器时（满足上述 4 个属性），可以分解 $G(z)$ 成两个全通函数之和，$A_1(z)/2$ 和 $A_2(z)/2$。一旦得到两个全通函数，可以很容易获得 $H(z)$ 即 $A_1(z)/2$ 和 $A_2(z)/2$ 的差，并通过图 6.16 的结构来实现它。由于幂次的互补性，我们看到，$H(z)$ 实现了高通滤波。

6.4.1　设计过程

从给定的奇数阶巴特沃斯、切比雪夫或椭圆低通滤波器寻找两个全通滤波器的极点和零点的过程在下面说明。我们已经指出，这些滤波器的传递函数 $G(z) = P(z)/D(z)$ 从相应的模拟原型通过双线性变换得到，它们所有的极点在 z 平面的单位圆内。它们的幅度响应 $|G(e^{j\omega})|$ 在 $\omega = 0$ 处有最大值，这很容易从 $z = 1$ 时 $G(z)$ 的值得到。为满足性质 6.4，必须令 $G(z)$ 除以 $G(e^{j})$ 或 $G(z)$ 乘以一个比例因子 $k = D(1)/P(1)$ 使 $|kG(e^{j\omega})| \leqslant 1$，作为设计过程的第一步。在下一步讨论中，假设 $G(z)$ 已经乘以标量因子 k。

从式（6.47），写出

$$Q^2(z) = P^2(z) - D(z)z^{-N}D(z^{-1}) \tag{6.58}$$

我们知道滤波器函数 $G(z)$ 的分子多项式 $P(z)$ 和分母多项式 $D(z)$，因此可以计算等式（6.58）的右侧。用 $R(z) = \sum_{n=0}^{2N} r_n z^{-n}$ 代表 $Q^2(z) = Q(z)Q(z)$。$R(z) = Q(z)Q(z)$ 的系数由 $Q(z)$的系数与 $Q(z)$的系数卷积得到：

$$r_n = q_n * q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k q_{n-k} \tag{6.59}$$

这些系数可以通过下列算法递归计算：

$$q_0 = \sqrt{r_0} \tag{6.60}$$

$$q_1 = \frac{r_1}{2q_0} \tag{6.61}$$

$$q_n = \frac{r_n - \sum_{k=1}^{n-1} q_k q_{n-k}}{2q_0}, \quad 2 \leqslant n \leqslant N \tag{6.62}$$

但是我们只需要计算 q_n，$n = 0, 1, 2, \cdots, (N-1)/2$，因为这些系数是反对称的，而且当 $n = (N+1)/2$ 时，$q_n = 0$。

当我们计算 q_n 系数和构造多项式 $Q(z) = \sum_{n=0}^{N} q_n z^{-n}$ 完成后，得到了 $P(z) - Q(z)$，现在分解因式找到 N 个零点。确定单位圆内的 r 个零点作为 $A_2(z)$ 的 r 个极点 $z_k(k = 1, 2, 3, \cdots, r)$。通过倒转多项式的系数得到这些零点，

得到分子式 $A_2(z)$，它在 z_k^{-1} 处有零点。确定 $P(z)+Q(z)$ 在单位圆外的零点作为 $A_1(z)$ 单位圆外 $(N-r)$ 个零点 $z_j(j=r+1, r+2, \cdots, N)$。通过逆转分子多项式系数有这些零点后，获得分母多项式 $A_1(z)$。它在 z_j^{-1} 处有 $(N-r)$ 个零点，如式（6.54）所示。这就完成了从 $G(z)$ 获得 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 的设计过程。在6.5节讲解了一个例子。

6.4.2　网格－梯型实现

另一个著名的如式（6.1）所示的IIR传递函数形式实现如图6.19所示，被称为网格－梯型实现。在关于语音信号处理的文献中，它也被称为自回归滑动平均（ARMA）模型，在信号处理中，一般称为自适应滤波器。当式（6.1）的分子是一个常数时，我们有全极点模型，也称作自回归（AR）模型，实现三阶AR模型的结构如图6.19b所示，而当分母是个常数时，得到一个FIR模型，称为滑动均值（MA）模型。如图6.17a所示的结构是三阶FIR滤波器函数或MA模型，图6.17b是它的转置结构。我们不说明这些模型的网格结构的理论分析，因为它超出了这本书的范围，但在下节解释如何使用MATLAB函数tf2latc得到该结构。这个函数实现了ARMA模型的理论过程，它给出了 N 个网格结构参数 k_i，$i=1, 2, \cdots, N$ 和 $N+1$ 个梯型系数值 v_i，$i=0, 1, \cdots, N$。但在图6.19a中，例子中梯型系数 v_5 值恰好为零，因此乘数器 v_5 是零。网格参数也被称为反射系数，已经证明，如果 $|k_i|\leqslant 1$，IIR滤波器函数极点在 z 平面的单位圆内。所以这个方法被用来测试IIR滤波器是否是稳定的。

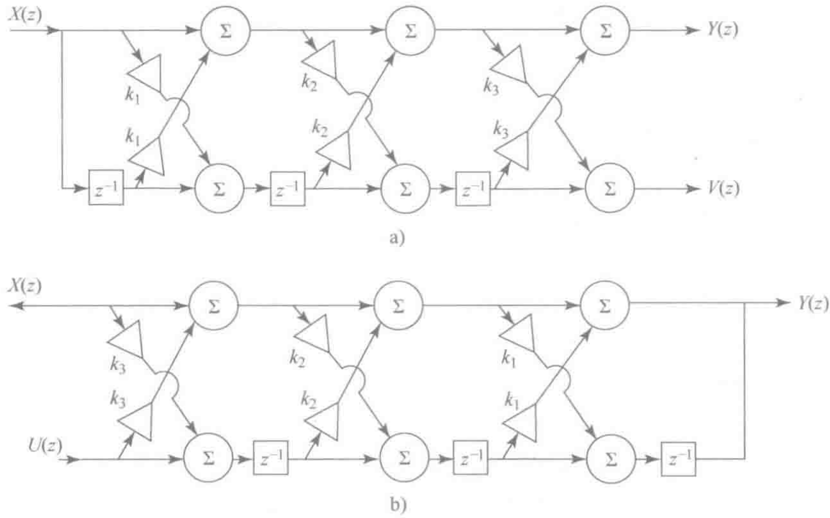


图6.17　a）FIR过滤器的网格结构；b）图a）FIR滤波器网格结构的转置

6.5 使用 MATLAB 实现 FIR 和 IIR 滤波器

正如本章提到的那样，许多涉及 FIR 和 IIR 滤波器的实现计算都可以由 MATLAB 函数实现。例如，级联结构中一个 FIR 滤波器的实现可以通过找到传递函数的根，然后找到拥有复共轭根对或一对实零点的二阶多项式。

为找到多项式 $H(z) = \sum_{n=0}^{N} b(n) z^{-n}$ 的根，使用 MATLAB 函数 $R = \text{roots}(b)$ 这里向量 $b = [b(0), b(1), b(2), \cdots, b(N)]$，$R$ 是 N 个根的向量。选择一对复共轭根或一对实根，使用 MATLAB 函数 $P_k = \text{poly}(R_k)$ 构造二阶多项式，这里 R_k 是两个根的列项，P_k 是二阶多项式系数向量。当然，如果 $H(z)$ 是一个奇数阶多项式，在 $H(z)$ 分解中，单实根的一阶多项式将单独作为一项存在。

例 6.11

使用 MATLAB 命令

```
b = [1.965 -3.202 4.435 -3.14 1.591 -0.3667];
R= roots(b)
```

得到根

```
0.2682 + 0.8986i
0.2682 - 0.8986i
0.3383 + 0.6284i
0.3383 - 0.6284i
0.4166
```

接着

```
R1=[0.2682+0.8986*i 0.2682-0.8986*i];
P1=poly(R1)
P1=
1.0000 -0.5364 0.8794
R2=[0.3383+0.6284*i 0.3383-0.6284*i];
P2=poly(R2)
P2 =
1.0000 -0.6766 0.5093
```

因此，如果 $H(z) = 1.965 - 3.202z^{-1} + 4.435z^{-2} - 3.14z^{-3} + 1.591z^{-4} - 0.3667z^{-5}$，构造一个正次数的 z 多项式，而且高阶项系数归一化：

$$
\begin{aligned}
N(z) &= [1.965z^5 - 3.202z^4 + 4.435z^3 - 3.14z^2 + 1.591z - 0.3667] \\
&= 1.965[z^5 - 1.6295z^4 + 2.257z^3 - 1.598z^2 + 0.8096z - 0.1866]
\end{aligned}
$$

从上面显示的 P_1 和 P_2 系数数据输出，我们构造多项式

$$N(z) = 1.965(z^2 - 0.5364z + 0.8794)(z^2 - 0.6766z + 0.5093)(z - 0.4166)$$

然后得到 $H(z)$ 的形式

$$H(z) = 1.965(1 - 0.5364z^{-1} + 0.8794z^{-2})(1 - 0.6766z^{-1} + 0.5093z^{-2}) \times (1 - 0.4166z^{-1})$$

例 6.12

考虑例 6.11 的 FIR 滤波器。使用简单的 MATLAB 函数 k = tf2latc(b) 获得反射系数 k_i,($i = 1, 2, 3, 4, 5,$) 的向量输出列表，这里 b 是例 6.11 给出的系数向量。

网格系数 k 的输出向量是

```
-0.3597
0.9325
-0.5745
0.5238
-0.1866
```

FIR 滤波器网格实现结构或 MA 模型如图 6.18 所示，网格系数如上所示。

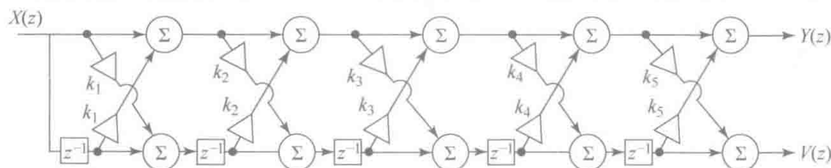


图 6.18 一个五阶 FIR 滤波器的网格结构

例 6.13

为得到 IIR 滤波器的级联实现，可以将分子和分母多项式因式分解成二阶多项式（也可能有一个一阶多项式）的积，如例 6.9 中所示。另一种方法是使用 MATLAB 函数 tf2zp 和 zp2sos，解释如下。

首先使用函数 ［z，p，k］ =tf2zp （num，den）得到输出向量 ［z，p，k］，它列出了零点、极点和 IIR 滤波器的常数增益。然后函数 sos = zp2sos （z，p，k）给出了每部分二阶多项式的系数，用 $L\times 6$ 的下列矩阵形式表示：

$$\begin{bmatrix} n_{01} & n_{11} & n_{21} & d_{01} & d_{11} & d_{21} \\ n_{02} & n_{12} & n_{22} & d_{02} & d_{12} & d_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{0L} & n_{1L} & n_{2L} & d_{0L} & d_{1L} & d_{2L} \end{bmatrix}$$

每一行 6 个元素定义了每个二阶部分 $H_i(z)$ 的传递函数，乘积形式表示如下：

$$H(z) = \prod_{i=1}^{L} H_i(z) = \prod_{i=1}^{L} \left(\frac{n_{0i} + n_{1i}z^{-1} + n_{2i}z^{-2}}{d_{0i} + d_{1i}z^{-1} + d_{2i}z^{-2}} \right)$$

这两个 MATLAB 函数可以用来对一个 FIR 函数因式分解。代替上述算法，我们让 FIR 滤波器多项式 $H(z)$ 的滤波器作为 IIR 滤波器的分母多项式，分子归一化。为了说明这一点，让我们考虑前面的示例和用 MATLAB 脚本运行两个函数如下：

```
num=1;
den=b
[z,p,k] = tf2zp(num,den);
sos = zp2sos(z,p,k)
sos =
0   0.5089   0        1.0000  -0.4166   0
0   0        1.0000   1.0000  -0.6766   0.5094
0   0        1.0000   1.0000  -0.5363   0.8794
```

因而，积形式如下：

$$\left(\frac{0.5089z^{-1}}{1-0.4166z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-2}}{1-0.6766z^{-1}+0.5094z^{-2}}\right)$$
$$\times\left(\frac{z^{-2}}{1-0.5363z^{-1}+0.8794z^{-2}}\right)$$

分子项与例 6.11 中的结果一致，它使用 roots 和 poly 函数。

用 IIR 滤波器分解为二阶函数积进行阐述；考虑如下传递函数：

$$H(z) = \frac{0.5 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.1z^{-4}}{1.965 - 3.202z^{-1} + 4.435z^{-2} - 3.14z^{-3} + 1.591z^{-4} - 0.3667z^{-5}} \tag{6.63}$$

使用 MATLAB 程序获得因式分解形式而实现一个 IIR 滤波器的级联结构

```
num=[0.5 0.2 0.3 0.0 0.1]
den=[1.965 -3.202 4.435 -3.14 1.591 -0.3667];
[z,p,k]=tf2zp(num,den);
sos=zp2sos(z,p,k)
sos =
0        0.2545   0        1.0000  -0.4166   0
1.0000   0.8204   0.6247   1.0000  -0.6766   0.5094
1.0000  -0.4204   0.3201   1.0000  -0.5363   0.8794
```

使用 sos 矩阵输入值，写出 $H(z)$ 的因式分解形式如下：

$$\left(\frac{0.2545z^{-1}}{1-0.4166z^{-1}} \times \frac{1+0.8204z^{-1}+0.6247z^{-2}}{1-0.6766z^{-1}+0.5094z^{-2}}\right) \times \left(\frac{1-0.4204z^{-1}+0.3201z^{-2}}{1-0.5363z^{-1}+0.8794z^{-2}}\right) \tag{6.64}$$

注意，这个表达分子似乎是 z 负次幂的五阶多项式，而传递函数的分子［见式（6.63）］是一个四阶多项式。但当 z 是正幂次数时进行多项式分解，因为多项式是 $\prod(z-z_i)$ 乘积形式，其中 z_i 是零点。所以前面因式分解形式转换为 z 正次数幂多项式比时，我们得到一个四阶分子多项式和五阶分母多项式：

$$\left(\frac{0.2545}{z-0.4166}\right)\left(\frac{z^2+0.8204z+0.6247}{z^2-0.6766z+0.5094}\right)\left(\frac{z^2-0.4204z+0.3201}{z^2-0.5363z+0.8794}\right)$$

$$=\frac{0.5z^4+0.2z^3+0.3z^2+0.1}{1.965z^5-3.202z^4+4.435z^3-3.14z^2+1.591z-0.3667}$$

这与 $H(z)$ 的结果一致，是一个 z 正次数幂的四阶分子多项式与五阶分母多项式之比。所以要注意用 z 正次数幂表达传递函数，然后在构造因式分解形式后检查结果，因为函数 zp2sos 仅适合在零点在 z 平面单位圆内的工作条件。但从 sos 矩阵构建 $H(z)$ 的因式分解形式使我们直接进入下一步，绘制每部分实现结构，例如，利用直接形式级联它们。这样一个实现类似于图 6.14 所示。

例 6.14

在前一章中，我们使用函数［r，p，k］= residuez（num，den）找到零点、极点和 IIR 滤波器函数 $H(z)$ 的增益常数。现在可以一次在一个向量［rk（1）rk（2）］选择两个余数及在复共轭极点对或两个实极点中选择对应的极点［pk（1）pk（2）］，以向量形式（bk，ak）构建每部分的分子分母。然后表示 $H(z)$ 的 IIR 函数即二阶函数或一阶函数部分，如果 $H(z)$ 有奇数个极点。我们考虑式（6.63）中相同的函数 $H(z)$，来实现并行结构。

```
b =
0.5000 0.2000 0.3000 0 0.1000
a =
1.9650 -3.2020 4.4350 -3.1400 1.5910 -0.3667
[r,p,k]=residuez(b,a)
r =
-0.1632 - 0.1760i
-0.1632 + 0.1760i
0.1516 - 0.0551i
0.1516 + 0.0551i
0.2777
p =
0.2682 + 0.8986i
0.2682 - 0.8986i
0.3383 + 0.6284i
0.3383 - 0.6284i
0.4166
```

```
k =
[]
r1 =
[-0.1632 + 0.1760i -0.1632-0.1760i]
p1 =
0.2682 - 0.8986i 0.2682+0.8986i
r2 =
[0.1516 - 0.0551i 0.1516 + 0.0551i]
p2 =
0.3383 + 0.6284i  0.3383 - 0.6284i
[b1,a1]=residuez(r1,p1,0)
b1 =
-0.3264 0.4038 0

a1 =
1.0000 -0.5364 0.8794
[b2,a2]=residuez(r2,p2,0)
b2 =
0.3032 -0.0333 0
a2 =
1.0000 -0.6766 0.5093
```

余数和第三个极点是0.2777和0.4166。所以我们建立一个传递函数$H(z)$，是三项之和

$$H(z) = \frac{-0.3264 + 0.4038z^{-1}}{1 - 0.5364z^{-1} + 0.8794z^{-2}} + \frac{0.3032 - 0.0333z^{-1}}{1 - 0.6766z^{-1} + 0.5093z^{-2}} + \frac{0.2777}{1 - 0.4166z^{-1}} \tag{6.65}$$

实现并联结构类似于图6.15所示。

例6.15

在例6.12中，使用MATLAB函数k = tf2latc（num）获得（MA）FIR滤波器网格结构实现。它是使用更通用函数［k，v］=tf2latc（num，den）获得IIR滤波器网格－梯型（ARMA）实现的特例，其中k为网格系数（反射系数）向量，而且矢量V给出网格－梯型系数——一个例子如图6.19所示。请注意，网格系数是逆序（即它们从右到左显示），如图6.17a所示；还要注意图6.18网格系数的数量是N但网格－梯型系数的数目为$N+1$。另一个特殊情况是函数k = tf2latc（1，den），其给出了全极点（AR）IIR滤波器的网格系数。一个三阶AR模型结构如图6.19b所示。注意AR模型结构与图6.17所示的MA模型FIR滤波器结构的区别。

考虑式（6.63）传递函数$H(z)$并获得其网格－梯型实现。使用下面的MATLAB函数［k，v］=tf2latc（num，den）并立即得到向量输出k和v。这种

实现的结构如图 6.19 所示，其中网格和梯型系数值如下：

```
b = [ 0.5000 0.2000 0.3000 0 0.1000];
a=[ 1.9650  -3.2020 4.4350 -3.1400 1.5910 -0.3667];
[k,v] = tf2latc(b,a)
k =
-0.3597
0.9325
```

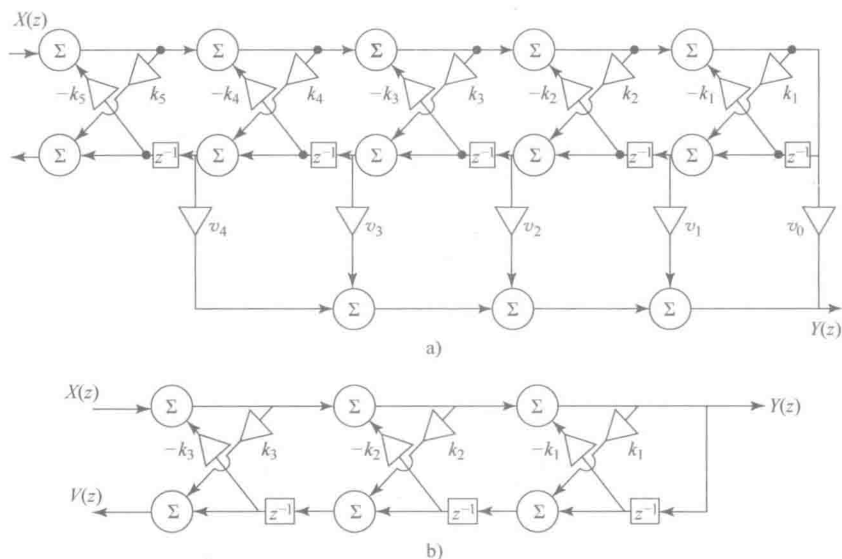


图 6.19

a）IIR 滤波器（ARMA 模型）网格－梯型结构

b）全极点 IIR 滤波器 $Y(z)/X(z)$（AR 模型）和全通滤波器 $V(z)/X(z)$

```
-0.5745
0.5238
-0.1866
v =
0.3831
0.3164
0.2856
0.1532
0.1000
0
```

例 6.16

为说明一个全极点（AR 模型）滤波器网格结构的推导过程，选择一个传递函数

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{1-0.2051z^{-1}-0.0504z^{-2}+0.0154z^{-3}} \tag{6.66}$$

并使用 MATLAB 函数 [k] = tf2latc (1, den) 得到网格系数的向量输出如下所示：

$$\begin{aligned} k = &-0.2145 \\ &-0.0473 \\ &0.0154 \end{aligned}$$

这个滤波器网格结构如图 6.19b 所示，这里 $H(z^{-1}) = Y(z)/X(z)$。

假设选择一个全通传递函数 $H_{ap}(z^{-1})$

$$H_{ap}(z^{-1}) = \frac{0.0154-0.0504z^{-1}-0.0205z^{-2}+z^{-3}}{1-0.2051z^{-1}-0.0504z^{-2}+0.0154z^{-3}} \tag{6.67}$$

并使用函数 [k, v] = tf2latc (num, den)，得到以下输出向量 k 和 v：

```
k = -0.2145
    -0.0473
     0.0154
v = 0.0000
    0.0000
    0.0000
    1.0000
```

虽然此全通传递函数有一个分子和一个分母，不是一个 AR 模型，但实现它的网格结构与图 6.19b 中 AR 模型的网格结构一样，但输出是 $V(z)$ 而不是 $Y(z)$。因此，实现的全通传递函数是 $H_{ap}(z^{-1}) = V(z)/X(z)$。

当我们比较图 6.17 中 FIR（MA）滤波器三阶网格结构和图 6.19b 的全极点 IIR（AR）滤波器或全通（AP）滤波器的三阶网格实现时，要仔细注意乘法器及其信号的方向不同。还要注意，图 6.19b 中的全通滤波器和全极点滤波器输出末端是不同的。

6.5.1　使用 MATLAB 编程求并行全通滤波器

作者开发的一段 MATLAB 程序 lp2apx. m 得到低通滤波器的分解是如下所示两个全通滤波器的和。输入数据包括通带截止频率 W_p、阻带频率 W_s、通带最大衰减 A_p、阻带最小衰减 A_s，可依据选择巴特沃斯、切比雪夫Ⅰ，切比雪夫Ⅱ和椭圆低通滤波器的不同来输入。如果从函数 buttord、cheb1ord、cheb2ord 得到的滤波器阶数是偶数，它会自动增加，使其成为一个奇数阶整数。程序立即能产生指定低通滤波器 $G(z)$ 的幅度响应，低通滤波器的响应计算从二阶全通滤波器 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 和高通滤波器 $H(z)$ 得到。$A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 的分子和分母多项式系

数是通过输入 A1N、A1D、A2N 和 A2D 分别得到。所以 $G(z)$ 分子和分母多项式系数可以通过输入 b 和 a 分别得到。如果输入 A1、A2、G 或 H，程序显示传递函数也就是两个多项式比。如果设计要求一个非常窄的过渡带或一个非常高阶的滤波器，由于数值不精确，程序或许不能成功运行。

```
%This Matlab Program lp2apx.m obtains the allpass filters
%  A1(z) and A2(z) from the lowpass (Butterworth, Chebyshev I
%  and Elliptic) filters of odd order.
clear all
Wp=input('Enter the passband cutoff frequency between 0
  and 1');
Ws=input('Enter the stopband cutoff frequency Wp<Ws<1');
Ap=input('Enter the max.attenuation in the passband');
As=input('Enter the min.attenuation in the stopband');
disp('As ftype,type in (1) for Butterworth, (2) for
  Chebyshev I, (3) Chebyshev II and (4) for Elliptic
  filters');
ftype=input('');
if ftype==1
disp('Butterworth Lowpass Filter');

[N,Wn]=buttord(Wp,Ws,Ap,As);
M=mod(N,2);
if M==0
N=N+1
end
[b,a]=butter(N,Wn);
end
if ftype==2
disp('Chebyshev I Lowpass Filter')
[N,Wn]=cheb1ord(Wp,Ws,Ap,As);
M=mod(N,2);
if M==0
N=N+1
end
[b,a]=cheby1(N,Ap,Wn);
end
if ftype==3
disp('Chebyshev II Lowpass filter')
[N,Wn]=cheb2ord(Wp,Ws,Ap,As);
M=mod(N,2);
if M==0
N=N+1
end
```

```
[b,a]=cheby2(N,As,Wn);
end
if ftype==4
disp('Elliptic Lowpass Filter')
[N,Wn]=ellipord(Wp,Ws,Ap,As);
M=mod(N,2);
if M==0
N=N+1
end
[b,a]=ellip(N,Ap,As,Wn);
end
[h0,w]=freqz(b,a,256);
H0=abs(h0);
plot(w/pi,H0);grid
axis([0.0 1.0 0.0 1.0])
title('MAGNITUDE OF SPECIFIED LP FILTER')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
% TO FIND Q(z)
k=sum(a)/sum(b);
b=b*k;
fliped_a= fliplr(a);
%R(z)= Q2(z)=P2(z)-z^-N D(z^-1)D(z)
R=conv(b,b)-conv(a,fliped_a);
% Calculate Q
Q(1)=R(1)^(0.5);
Q(2)=R(2)/(2*Q(1));
for n=2:N
term=0;
for k=1:n-1
term=Q(k+1)*Q(n-k+1)+term;
end
Q(n+1)=(R(n+1)-term)/(2*Q(1));
end
%Zeros of P+Q is calculated
j=1;
k=0;
P_plus_Q=b+Q;
zeros=roots(P_plus_Q);
for i=1:N
if abs(zeros(i))<1
zero_in(j)=zeros(i);
j=j+1;
else
k=k+1;
```

```
zero_out(k)=zeros(i);
end
end
A1N=poly(zero_out);%Numerator of A_1(z)
A1D=fliplr(A1N); %Denominator of A_1(z)
A1=tf(A1N,A1D,1);
A2D=poly(zero_in);%Denominator of A_2(z)
A2N=fliplr(A2D);%Numerator of A_2(z)
A2=tf(A2N,A2D,1);
G=0.5*(A1+A2); % LOWPASS FILTER FROM THE TWO ALLPASS FILTERS
[numlp,denlp]=tfdata(G,'v');
[h1,w]=freqz(numlp,denlp,256);
H1=abs(h1);
figure
plot(w/pi,H1);grid
axis([0.0 1.0 0.0 1.0])
title('MAGNITUDE OF LP FILTER FROM THE TWO ALLPASS FILTERS')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
H=0.5*(A1-A2); % HIGHPASS FILTER FROM THE TWO ALLPASS FILTERS
[numhp,denhp]=tfdata(H,'v');
[h2,w]=freqz(numhp,denhp,256);
H2=abs(h2);
figure
plot(w/pi,H2);grid
axis([0.0 1.0 0.0 1.0])
title('MAGNITUDE OF HP FILTER FROM THE TWO ALL PASS FILTERS')
ylabel('Magnitude')
xlabel('Normalized frequency')
%END
```

例 6.17

通过椭圆低通滤波器的例子说明程序的使用，设计要求 $W_p=0.4$，$W_s=0.6$，$A_p=0.3$ 和 $A_s=35$，这样选择是为突出显示通带和阻带响应。运行这个例子的完整过程如下，包括上面提到的 3 个幅度响应图：

```
Enter the passband cutoff frequency between 0 and 1  0.4
Enter the stopband cutoff frequency Wp<Ws<1  0.6
Enter the max.attenuation in the passband  0.3
Enter the min.attenuation in the stopband  35
As ftype, type in (1) for Butterworth, (2) for Chebyshev I,
  (3) for Chebyshev II (4) for Elliptic filters
4
Elliptic Lowpass Filter
N =
```

```
5
A1N
A1N =
1.0000 -1.3289 1.9650
A1D
A1D =
1.9650 -1.3289 1.0000
A2N
A2N =
-0.3667 1.1036 -0.9532 1.0000
A2D
A2D =
1.0000 -0.9532 1.1036 -0.3667
A1

Transfer function:
z^2 - 1.329 z + 1.965
-----------------------
1.965 z^2 - 1.329 z + 1

Sampling time: 1

A2

Transfer function:
-0.3667 z^3 + 1.104 z^2 - 0.9532 z + 1
--------------------------------------
z^3 - 0.9532 z^2 + 1.104 z - 0.3667

Sampling time: 1

G

Transfer function:
0.1397 z^5 + 0.1869 z^4 + 0.3145 z^3 + 0.3145 z^2 + 0.1869 z
  + 0.1397
-------------------------------------------------------------
1.965 z^5 - 3.202 z^4 + 4.435 z^3 - 3.14 z^2 + 1.591 z
  - 0.3667

Sampling time: 1
```

```
H

Transfer function:
0.8603 z^5 - 2.469 z^4 + 4.021 z^3 - 4.021 z^2 + 2.469 z
  - 0.8603
-----------------------------------------------------------
1.965 z^5 - 3.202 z^4 + 4.435 z^3 - 3.14 z^2 + 1.591 z
  - 0.3667

Sampling time: 1
```

用下列形式重写传递函数 $G(z^{-1})$，以便下一章参考。

$$\left(\frac{0.1397}{1.965}\right)\times\frac{(1+1.337z^{-1}+2.251z^{-2}+2.251z^{-3}+1.337z^{-4}+z^{-5})}{(1-1.629z^{-1}+2.256z^{-2}-1.597z^{-3}+0.8096z^{-4}-0.1866z^{-5})} \tag{6.68}$$

低通椭圆滤波器 $G(z)$ 幅度响应，并行连接 $G(z) = [(A_1(z) + A_2(z)]/2$ 幅度响应，和高通滤波器 $H(z) = [(A_1(z) - A_2(z)]/2$ 的幅度响应如图 6.20，图 6.21，和图 6.22 分别所示。

在上面的例子中得到的两个全通滤波器函数［见式（6.69）和式（6.71）］分别被表达如式（6.70）和式（6.72）。函数 $A_1(z)$ 可以用直接形式实现，$A_2(z)$ 可以用我们讨论的多种结构实现，例如，直接形式、并行形式，或网格－梯型形式。但是一阶和二阶全通函数类能通过许多结构实现，它使用最少的乘法器[1]。几个一阶和二阶全通滤波器的例子分别如图 6.23 和图 6.24 所示。它们的传递函数分别如下给出

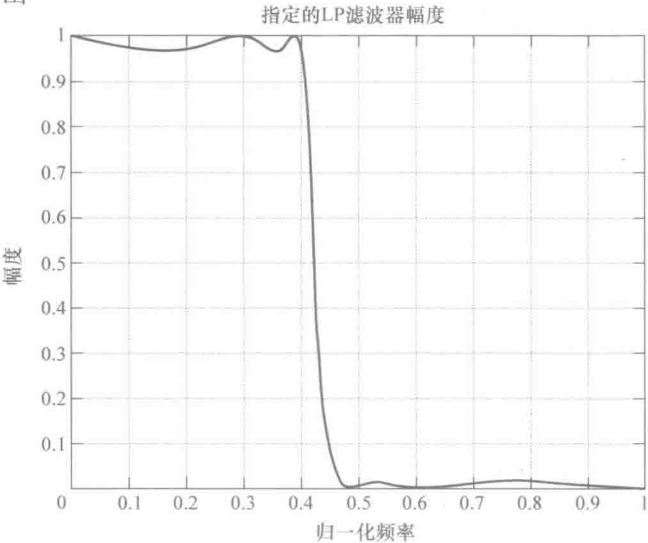


图 6.20　椭圆低通滤波器 $G(z)$ 的幅度响应

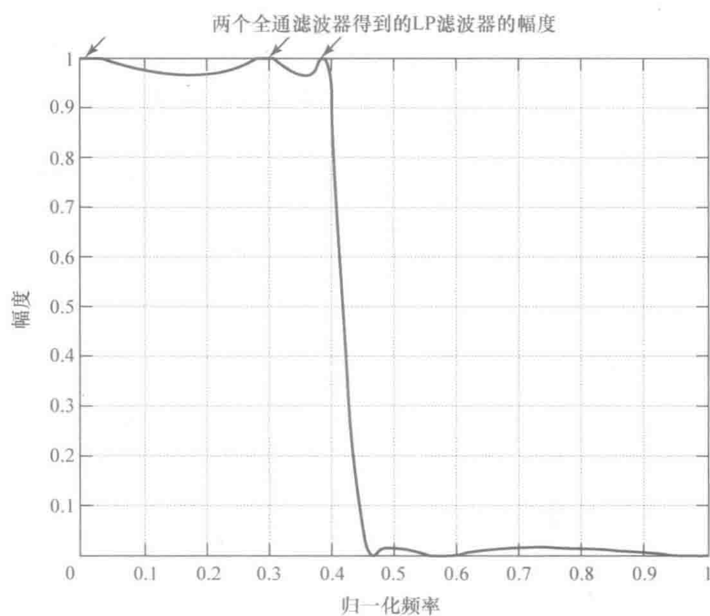


图6.21　两个并行全通滤波器幅度响应

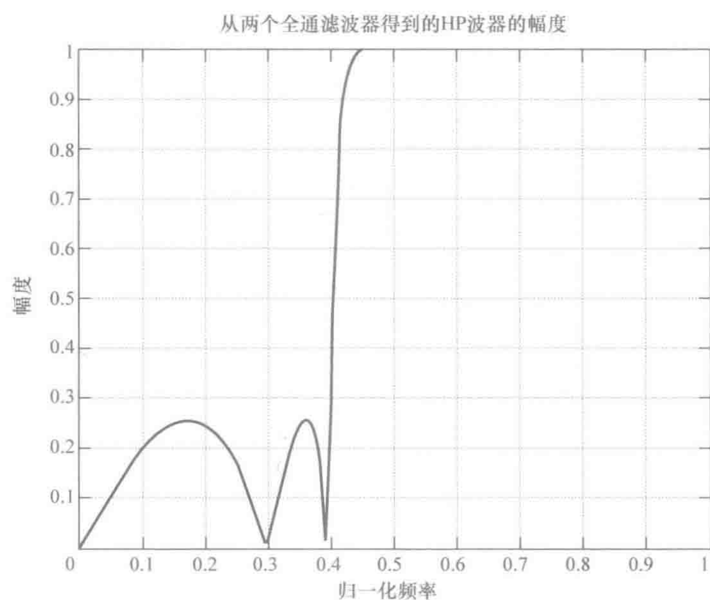


图6.22　两个并行全通滤波器的高通滤波器幅度响应

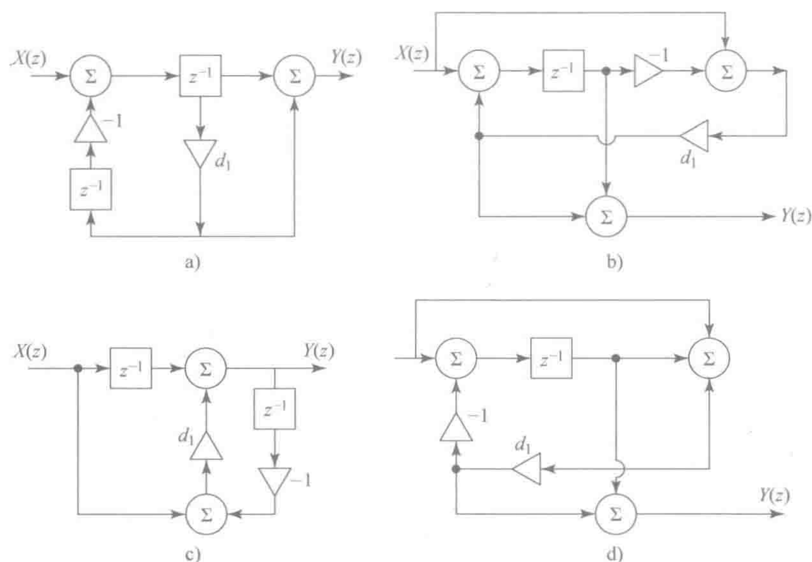


图 6.23 一阶全通结构

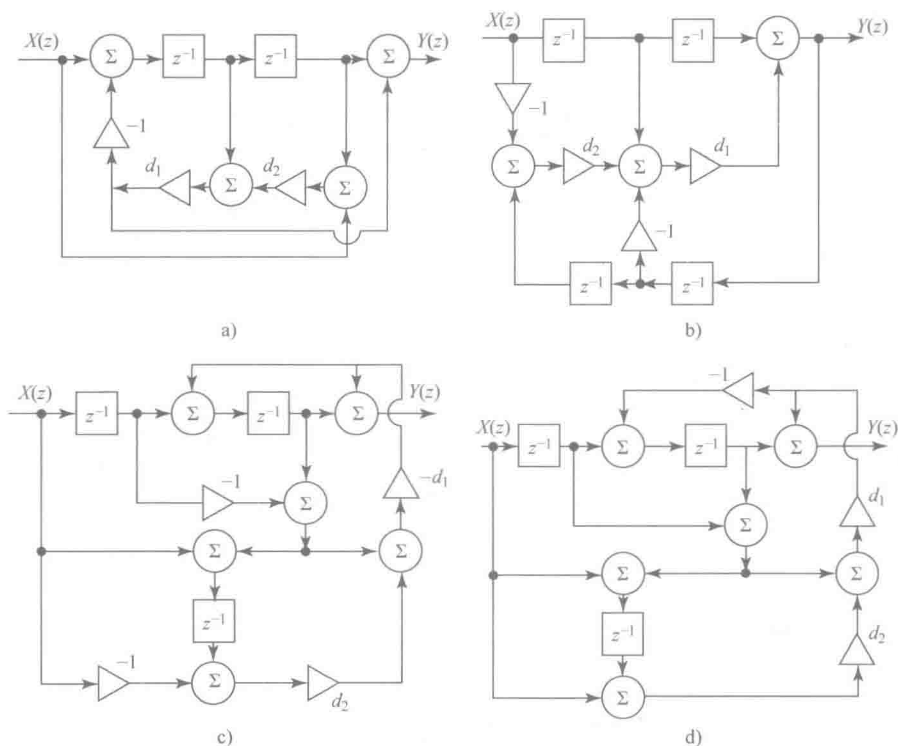


图 6.24 二阶全通结构

$$A_{\rm I}(z) = \frac{d_1 + z^{-1}}{1 + d_1 z^{-1}}$$

$$A_{\rm II}(z) = \frac{d_1 d_2 + d_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_1 d_2 z^{-2}}$$

我们为$A_1(z)$和$A_2(z)$选择简单的二阶全通滤波器结构（见图6. 24a），这比保留 4 个二阶结构需要较少的延迟单元。当这两个全通滤波器并行连接（见图 6. 16）时，得到如图 6. 25 所示的结构，在这个例子中：选择了五阶椭圆低通滤波器的传递函数 $G(z)$

$$A_1(z) = \frac{z^2 - 1.329z + 1.965}{1.965z^2 - 1.329z + 1}$$

$$= \frac{1 - 1.329z^{-1} + 1.956z^{-2}}{1.965 - 1.329z^{-1} + z^{-2}} \tag{6.69}$$

$$= \frac{0.5089 - 0.6763z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.6763z^{-1} + 0.5089z^{-2}} \tag{6.70}$$

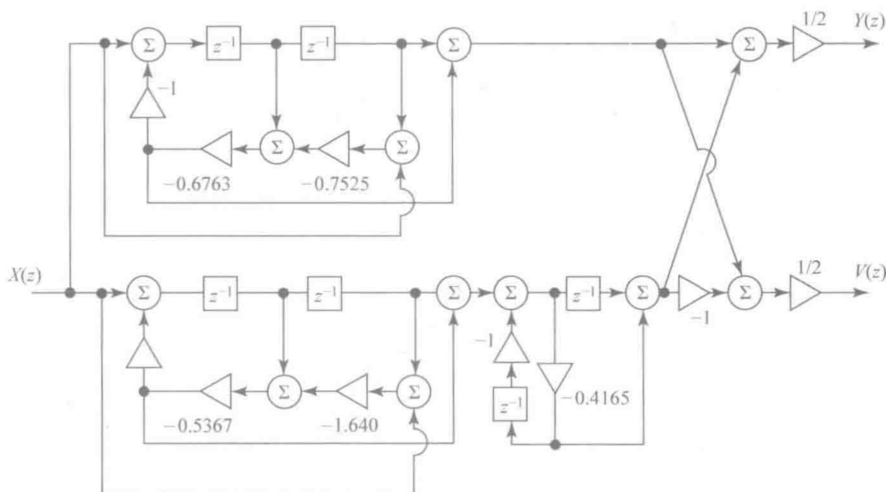


图 6. 25　两个全通滤波器并联的五阶椭圆低通滤波器实现

$$A_2(z) = \frac{-0.3667z^3 + 1.104z^{-2} - 0.9532z + 1}{z^3 - 0.9532z^2 + 1.104z - 0.3667} \tag{6.71}$$

$$= \frac{-0.3667 + 1.104z^{-1} - 0.9532z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.9532z^{-1} + 1.104z^{-2} - 0.3667z^{-3}} \tag{6.72}$$

在式（6. 73）中，我们以乘积形式表示了三阶全通滤波器，使用图 6. 24a 所示的二阶全通结构与图 6. 23a 所示的一阶全通结构的级联形式实现三阶全通滤波器 $A_2(z)$。然后与二阶全通滤波器 $A_1(z)$ 并行连接。低通椭圆滤波器 $G(z) =$

$1/2[(A_1(z)+A_2(z)]$ 的结构如图 6.25 所示。得到

$$A_2(z)=\left(\frac{0.8805-0.5367z^{-1}+z^{-2}}{1-0.5367z^{-1}+0.8805z^{-2}}\right)\left(\frac{-0.4165+z^{-1}}{1-0.4165z^{-1}}\right) \qquad (6.73)$$

如前所述，我们可以网格全通结构形式代替设计图 6.24 和图 6.25 中的全通函数。二阶滤波器 $A_1(z)$ 和三阶滤波器 $A_2(z)$ 的网格系数通过使用 MATLAB 函数 [k, v] =tf2latc (num, den) 得到，获得格型结构之后，它们并行连接形式如图 6.27 所示。

```
%Design of the second order filter A1(z)
A1num=[0.5089 -0.6763 1];
A1den=[1 -0.6763 0.5089];
[K1,V1]=tf2latc(A1num,A1den)

%Lattice and ladder coefficients for A1(z)
K1 =
-0.4482
0.5089
V1 =
0
0
1

%Design of third order filter A2(z)
A2num=[-0.3667 1.104 -0.9532 1];
A2den=fliplr(A2num)
[K2,V2]=tf2latc(A2num,A2den)
%Lattice and ladder coefficients for A2(z)

K2 =
-0.3385

0.8717
-0.3667

V2 =
0
0
0
1
```

以网格 - 梯型形式实行三阶传递函数 $A_2(z)$ 的电路如图 6.26 所示，这里 $V_0=V_1=V_2=0$，如上向量 V_2 的值一样。

实现五阶低通椭圆滤波器的电路和两个全通滤波器 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 并联一样，如图 6.27 所示，每个都用网格结构实现。

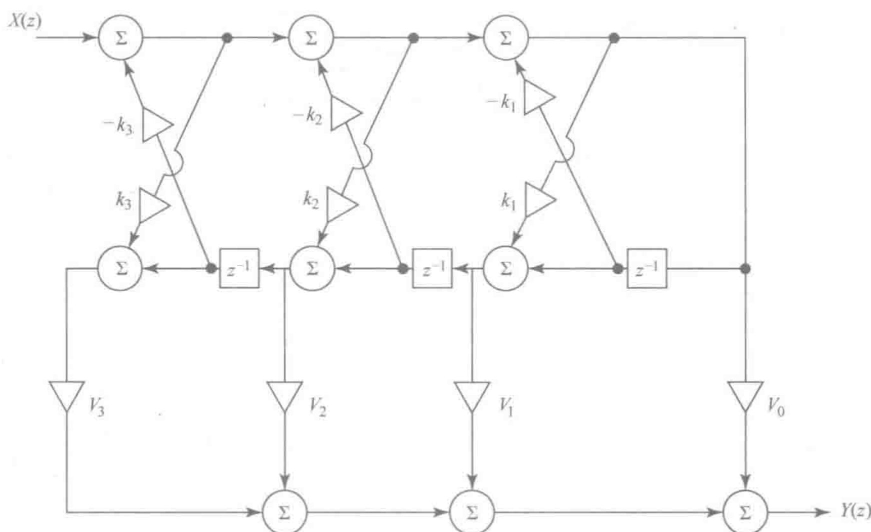


图 6.26　三阶全通滤波器 $A_2(z)$ 的网格 - 梯型结构

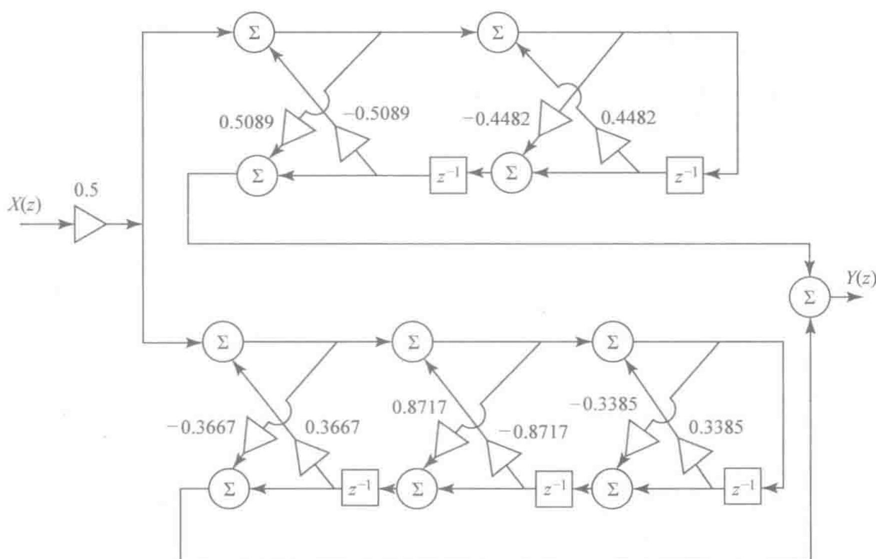


图 6.27　两个网格 - 梯型全通结构并联实现一个五阶低通椭圆滤波器

现在比较一下实现一个低通五阶 IIR 滤波器的不同电路。所有这些电路设计都符合相同指标——$W_p=0.4$，$W_s=0.6$，$A_p=0.3$，$A_s=35$——分别用级联形式实现，并行形式实现及网格 - 梯型结构，分别如图 6.14，图 6.15 和图 6.19 所示。它们使用超过 5 个最小数量的乘法器，而网格 - 耦合全通滤波器如图 6.25 所示，使用 5 个乘法器——抛弃了增益为 -1 或 1/2 的乘法器，因为它们代表二进制数的小运算。

一个五阶滤波器的直接形式 IIR 滤波器需要 5 个以上的乘法器，而图 6.27 所示的滤波器是网格 - 梯型、耦合全通滤波器，要求 10 个乘法器。因此我们认为图 6.25 全通滤波器并联需要最小数量的延迟单元，而优于其他结构。

IIR 滤波器实现采用全通滤波器并联有另一个优点，解释如下。有人指出，当乘法器常数被量化到有限字长时，全通滤波器的幅度响应不会发生变化。另一个优势是有许多实现全通滤波器的结构，它们均包含最少数量的乘法器（和延迟单元）。在通过两个全通滤波器并行链接实现低通滤波器的方法中，使用方程式（6.42）的性质（6.4），再示如下：

$$|G(e^{j\omega})| = \frac{1}{2}|e^{j\theta_1(\omega)} + e^{j\theta_2(\omega)}| = \frac{1}{2}|1 + e^{j[\theta_1(\omega)-\theta_2(\omega)]}| \leqslant 1$$

这说明，包含两个全通滤波器并联的低通滤波器幅度响应等于或小于 1。图 6.28 所示的幅度响应展示了通带这个特性，用箭头标记。

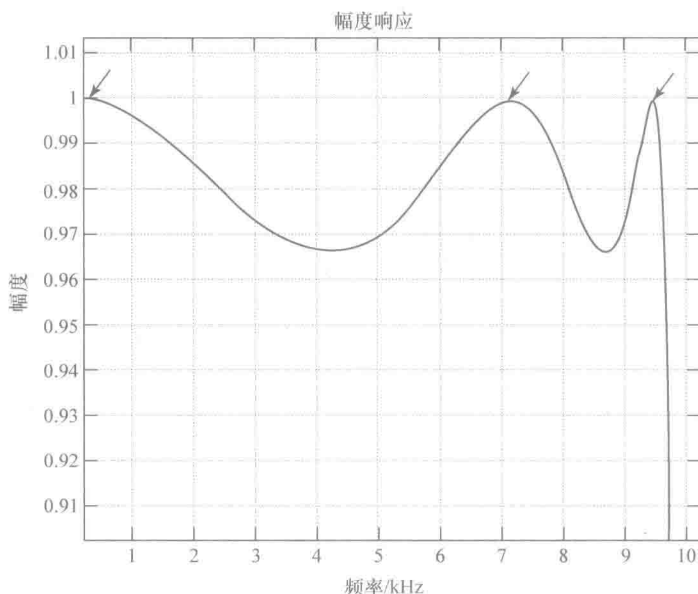


图 6.28 一个椭圆低通滤波器的放大幅度响应

只要全通滤波器在所有频率维持一个恒定的幅度且保持稳定，当它们的乘法器常数字长改变时，低通滤波器的幅度响应在这 3 个频率处不可能超过这个常数，其中幅度响应的导数是零。因此对于字长的小变化（如 1 或 2 位），在这些频率处的幅度变化几乎为零。在通带其他频率处，如果不为零，变化也将是很小的。字长小变化情况性能仿真证实，幅度响应的改变级显著低于其他结构情况。这表明全通滤波器并行结构与建议的实现 IIR 滤波器的其他结构相比有很多优势。在下一章中，将对有限字长效应做更详细的研究，并行全通滤波器结构被称

为网格－耦合全通结构。但这些结构仅能用于设计低通滤波器（奇数阶），而网格和网格－梯型结构一般来说可以实现任何传递函数。

6.6　小结

当我们获得像前面两章提到的近似指标集的 FIR 和 IIR 滤波器后，下一步是选择符合一些重要的准则的最佳结构，这在编程实现时域算法、滤波器设计和硬件搭建之前进行。很明显，实现一个滤波器算法将取决于考虑实现它的特殊结构。在可以得到无限精度的输入信号幅度和乘法器常数值的理想条件下，几个可选结构的任何一个都将实现传递函数。但当它们用有限字长的位数表示后，它们的实际性能可能会有很大不同，特别是当它们用定点二进制表示时。因此有必要更详细地研究在时域和频域时它们的性能，并进行比较。使用的一些性能比较标准是频率响应的有效衰减、稳定性和可能极限环、算法流控制复杂度、乘法器的数量和每样本输出的加法指令数。在我们选择进一步研究的少数结构之前，大量的计算机仿真对提出这些问题是必要的。

在这一章，我们讨论了实现 FIR 和 IIR 滤波器的几种结构，评论了有限字长效应。这个标准的更详细的讨论和其他问题将在下一章中进行研究。

习题

6.1　画出下列传递函数的 FIR 滤波器的直接形式和级联形式：

$$H(z^{-1}) = 4(1+0.6z^{-1}-0.5z^{-2})(1-0.25z^{-1}+0.9z^{-2})$$

6.2　求题 6.1 FIR 滤波器的多相式结构和它的转置。

6.3　确定实现 FIR 滤波器直接形式结构的转置。

$$H(z^{-1}) = 1+z^{-1}-0.5z^{-2}+0.02z^{-3}+0.003z^{-5}$$

6.4　确定题 6.3 中 FIR 滤波器的多相结构。

6.5　求 FIR 滤波器的多相结构

$$H(z^{-1}) = 1+0.5z^{-1}+0.4z^{-2}-0.6z^{-3}+z^{-4}+1.2z^{-5}+0.2z^{-6}$$

6.6　求图 6.29 所示网格电路的传递函数 $H_1(z) = Y(z)/X(z)$ 和 $H_2(z) = G(z)/X(z)$。

6.7　画出图 6.29 所示电路的直接形式和转置结构。

6.8　(a) 推导图 6.30 所示网格结构的传递函数 $H_1(z) = Y(z)/X(z)$。

(b) 推导传递函数 $G(z) = G_2(z)/Y(z)$ 和证明 $H_2(z) = G_2(z)/X(z)$ 是一个全通函数。

(c) 如果图 6.30 所示网格结构的传递函数是 $H_1(z) = 1/(1+1.38z^{-1}+$

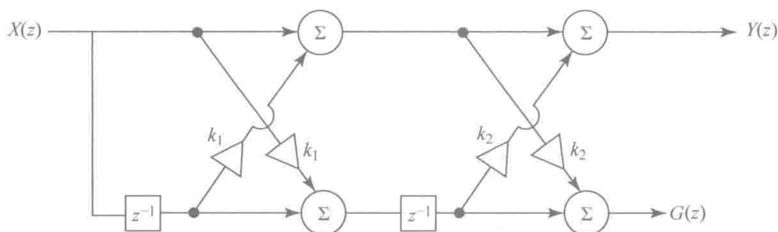


图 6.29 习题 6.6

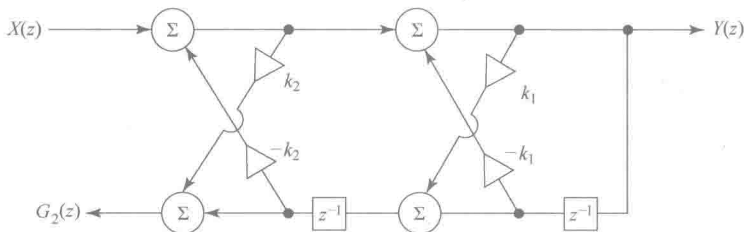


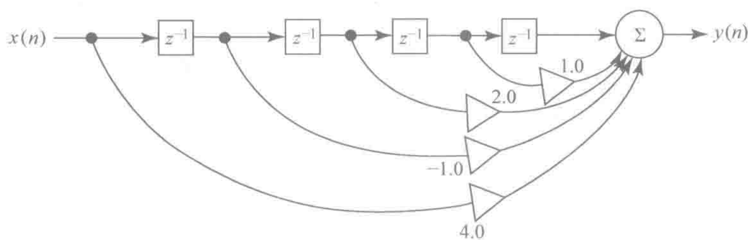
图 6.30 习题 6.8

$1.3z^{-2}$)，k_1 和 k_2 的值是多少？

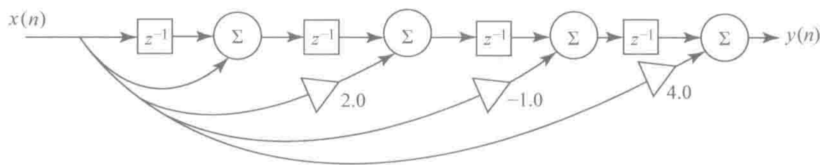
6.9 画出图 6.29 所示网格结构的转置。

6.10 画出如图 6.31a 和图 6.31b 所示滤波器的单位脉冲响应。

6.11 推导图 6.32 所示结构的传递函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$。



a)



b)

图 6.31 习题 6.10

6.12 画出图 6.32 所示结构的转置。

6.13 (a) 画出实现以下传递函数 $H(z^{-1})$ 的并行结构电路，并求 z 的逆变换 $h(n)$：

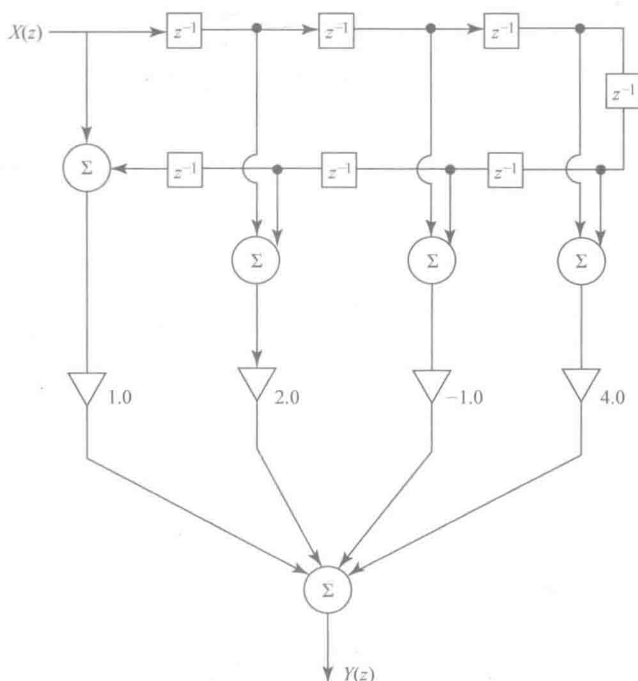


图6.32　习题6.12

$$H(z^{-1}) = \frac{(1+0.2z^{-1})z^{-2}}{(1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2})(1+0.4z^{-1})}$$

（b）推导 z 的逆变换

$$H(z) = \frac{(1+0.2z)z^{2}}{(1-0.6z+0.25z^{2})(1+0.4z)}$$

6.14　求 $[(0.8)^n-(0.4)^n]u(n)$ 的 z 变换 $X(z)$，并求 $X(-z)$ 的逆变换。

6.15　画出实现下列传递函数的级联和并联形式的数字滤波器电路：

$$H(z) = \frac{0.44z^{2}+0.36z+0.02}{(z^{2}+0.8z+0.5)(z-0.4)}$$

6.16　画出下列传递函数的直接Ⅰ型，直接Ⅱ型，级联和并联结构。

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{(1+0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1}+0.2z^{-2})}$$

6.17　画出题6.16结构的转置图。

6.18　给定一个传递函数

$$H(z^{-1}) = \frac{1+0.1z^{-1}}{(1+0.3z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

求实现它的级联和并联结构。画出其转置结构图。

6.19　画出图6.33所示结构的直接Ⅱ型结构。求出当 $\theta=\pi/5$、$r=0.6$ 时的单位脉冲响应。

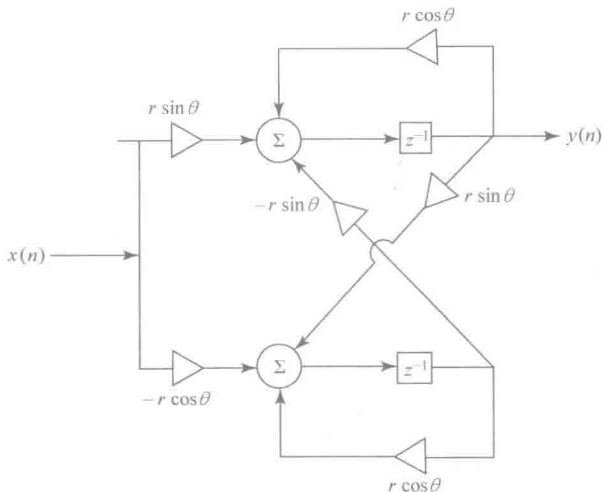


图6.33　习题6.19

6.20　请用尽可能多的结构实现如下传递函数:

$$H(z)=\frac{z+0.2}{(z+0.1)(z+0.4)(z^2+0.5z+0.06)}$$

6.21　确定下列传递函数的级联和并联结构

$$H(z)=\frac{1+0.3z^{-1}}{(1-0.3z^{-1})(1-0.5e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-0.5e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})}$$

MATLAB 习题

6.22　求出实现滤波器函数 $H(z^{-1})$ 的直接型和级联结构。

$$H(z^{-1})=1+0.2z^{-1}+0.3z^{-2}-0.4z^{-3}-0.5z^{-5}+0.6z^{-6}+z^{-7}$$

6.23　求出实现下列滤波器的直接型和级联型结构。

$$H_1(z^{-1})=1-0.5z^{-1}+0.3z^{-2}+0.1z^{-3}+0.02z^{-4}-0.05z^{-5}$$

和 $H_2(z^{-1})=1.0+0.8z^{-1}+0.8z^{-2}+0.08z^{-3}+0.01z^{-4}$

6.24　实现题6.23中FIR滤波器的网格结构。

6.25　求出实现以下IIR滤波器的直接Ⅰ型和级联结构:

$$H_1(z)=\frac{1-0.25z^{-1}}{1+0.9z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}+\frac{1+0.4z^{-1}}{1+0.2z^{-1}+0.08z^{-2}}$$

$$H_2(z^{-1})=\frac{1+0.1z^{-1}+z^{-2}-0.2z^{-3}}{1+z^{-1}+0.24z^{-2}}+\frac{4z^{-1}}{(1-0.8z^{-1})(1-0.4z^{-1})}$$

6.26　求出实现以下滤波器的并联和级联结构：

$$H_1(z^{-1}) = \left(\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1}}{1-0.2z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1+0.2z^{-1}}\right)$$

$$H_2(z^{-1}) = \left(\frac{1-0.25z^{-1}}{1+0.9z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}\right) \times \left(\frac{1+z^{-1}}{1+0.4z^{-1}} + \frac{2z^{-2}}{1+0.6z^{-1}+0.6z^{-2}}\right)$$

6.27　画出实现以下 IIR 滤波器的级联和并联结构：

$$H(z^{-1}) = \frac{1.0+0.0141z^{-1}+0.0284z^{-2}}{1-2.9061z^{-1}+4.2077z^{-2}-3.45412z^{-3}+1.6046z^{-4}-0.3365z^{-5}}$$

6.28　画出实现下列全极点 IIR 滤波器的网格结构。它们是稳定的吗？

$$H_1(z^{-1}) = \frac{1}{1.0+0.3z^{-1}-0.04z^{-2}-0.13z^{-3}-0.02z^{-4}}$$

$$H_2(z^{-1}) = \frac{1}{1.0+2.3z^{-1}+0.16z^{-2}-0.25z^{-3}-0.26z^{-4}}$$

$$H_3(z^{-1}) = \frac{1}{1.0+0.6z^{-1}-6.01z^{-2}-3.75z^{-3}-1.5z^{-4}}$$

6.29　画出下列全通滤波器的网格结构。

$$A_1(z^{-1}) = \frac{0.01-0.75z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.01z^{-2}}$$

$$A_2(z^{-1}) = \frac{-0.12-0.06z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}}{1+0.1z^{-1}-0.06z^{-2}-0.12z^{-3}}$$

6.30　求出下列 IIR 滤波器的网格 – 梯型结构：

$$H(z^{-1}) = \frac{1.2+z^{-1}}{1.0+1.1z^{-1}+0.5z^{-2}+0.1z^{-3}}$$

6.31　求出下列 IIR 滤波器的网格 – 梯型结构：

$$H(z^{-1}) = \frac{0.01-0.75z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+0.01z^{-2}}$$

6.32　确定以下 IIR 滤波器的网格 – 梯型结构：

$$H(z^{-1}) = \frac{-0.12-0.06z^{-1}+0.1z^{-2}+z^{-3}}{1+0.1z^{-1}-0.06z^{-2}-0.12z^{-3}}$$

6.33　找到下列 IIR 滤波器的网格 – 梯型结构：

$$H_1(z^{-1}) = \frac{0.9+0.7z^{-1}-0.6z^{-2}}{1.0+z^{-1}+0.47z^{-2}+0.098z^{-3}+0.006z^{-4}}$$

$$H_2(z^{-1}) = \frac{1.0+0.5z^{-1}+0.5z^{-2}}{1.0+z^{-1}+0.47z^{-2}+0.098z^{-3}+0.006z^{-4}}$$

$$H_3(z^{-1}) = \frac{1.0 + z^{-1} + z^{-2}}{1.0 + z^{-1} + 0.52z^{-2} + 0.12z^{-3} + 0.016z^{-4}}$$

6.34 使用网格－耦合全通结构，设计一个低通巴特沃斯滤波器，$\omega_p = 0.3$，$\omega_s = 0.6$，$A_p = 0.25$，$A_s = 55$。在同一图中，给出巴特沃斯滤波器和网格－耦合全通滤波器的幅度响应。

6.35 同题6.34的规格参数，使用网格－耦合全通结构设计一个切比雪夫低通 IIR 滤波器。在同一图中，给出切比雪夫滤波器和网格－耦合全通滤波器的幅度响应。

6.36 使用网格－耦合全通结构，设计一个椭圆低通 IIR 滤波器，$\omega_p = 0.25$，$\omega_s = 0.5$，$A_p = 0.20$，$A_s = 60$。在同一图中，给出椭圆滤波器和网格耦合全通滤波器的幅度响应。

参考文献

1. S. K. Mitra and K. Hirano, Digital allpass networks, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **CAS-21**, 688–700 (1974).
2. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.
3. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing—A Computer Based Approach*. McGraw-Hill, 2001.
4. S. K. Mitra and J. F. Kaiser, eds., *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1993.
5. B. A. Shenoi, *Magnitude and Delay Approximation of 1-D and 2-D Digital Filters*, Springer-Verlag, 1999.

第7章　滤波器量化分析

7.1　简介

本书前面章节讨论的离散时间系统与数字滤波器的分析与设计及它们的实现，DFT - IDFT 计算等大部分在 MATLAB 环境下可由信号处理工具箱中的函数完成，采用双精度计算。这意味着所有输入信号，滤波器系数或单位冲激响应等其数值表示都用 64 位表示，因此，这些数字的近似范围在 $10^{-308} \sim 10^{308}$ 之间，精度约为 $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-6}$。显然这个范围是非常大的，数字精度非常小，数字几乎可以认为“无限精度。”一旦这些数字滤波器和 DFT - IDFT 由目前描述的过程获得，它们可以在大型计算机，工作站和个人计算机上进一步进行“无限精度”分析。但当描述数字滤波器的算法和 FFT 计算必须在专用微处理器或专用集成电路（ASIC）或数字信号处理器（DSP）芯片等硬件上实现时，许多实际要考虑的问题和约束就显现出来。使用在硬件系统中的寄存器、存储数据有限字长，处理数据所需求的内存容量由数据位数决定——也称选择存储数据的字长。更多的内存意味着能源消耗，因此需要最小化字长。在微处理器，DSP 芯片，甚至在工作站和个人计算机上，我们喜欢使用尽可能少位数的寄存器而获得高计算速度、低功耗和低成本。但这样的便携式设备，如手机、个人数字助理（PDA）存储容量有限、电池低电压和供电时间短。这些约束在其他装置变得更加严重，如数字助听器及可吞服嵌入探测医学胶囊。

所以数字滤波器和嵌入式系统设计需求非常大，均使用最小位数去表示数据或存储在寄存器中。当滤波器由有限字长寄存器组成和模拟 - 数字转换器（ADC）被采用高采样率设计时，输入信号样本用减小的数据位数表示，滤波器频率响应和 DFT - IDFT 通过 FFT 运算结果将不同于“无限精度”设计运算结果。用有限字长表示数据的过程被称为量化，这发生在实现滤波器结构选择或 FFT 运算步骤等几个点。正像前一章所指出的，当假定无限精度时，可以用大量结构实现给定的传递函数。但当使用有限字长寄存器实现相应的差分方程完成硬件设计时，有限字长的效果高度依赖于结构。因此，鉴于用几种方式量化和有限精度加法乘法运算操作结果受到数据量化方式影响等事实，此类分析需要进一步加深研究。

在本章，我们将讨论一个能使用有限字长分析和设计滤波器的被称为 FDA

的新 MATLAB 工具箱。二进制数字的不同表示形式和数字加法与乘法效果将在本章后面部分解释。影响滤波器与理想情况性能偏差的第三个因素是 FIR 和 IIR 滤波器的选择。获取所需频率响应的逼近类型选择是另一个因素，也会影响有限字长的效果。在本章，我们将讨论所有这些因素的影响，通过一个设计实例说明它们的影响。

7.2 滤波器设计分析工具

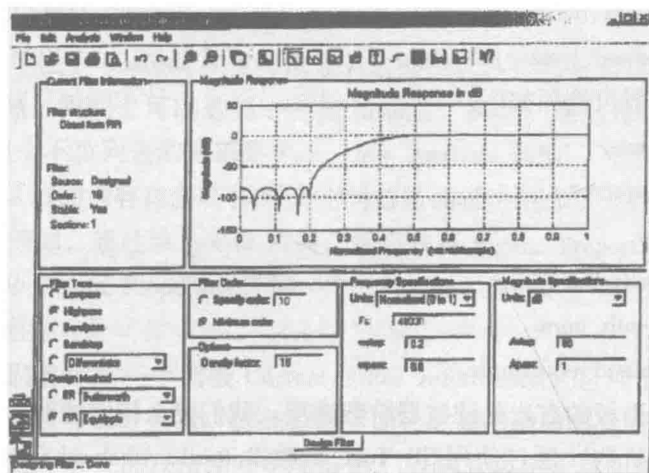
已有大量的研究提出了这些问题，但影响数字滤波器和系统性能的量化没有很具体例子展示。目前虽然没有设计或分析一个有限精度的滤波器的分析方法，但从研究成果可以获得一些有用的帮助，它是选择合适结构和量化形式初步决策的指导。任何对此类研究工作感兴趣的学生都应该阅读其他教材中有限字长影响的相关材料[1,2,4]。在这一章，我们将讨论由 MathWorks 开发的滤波器设计和分析软件来解决上述问题。

这个 FDA Tool 有限设计 - 分析（FDA）工具，在 Filter Design Toolbox 中找到，与 Signal Processing（SP）Toolbox 结合。不像 SP 工具箱，FDA 通过大量利用 MATLAB 的面向对象编程能力开发，FDA 工具使用的函数语法不同于 MATLAB 函数和 SP Toolbox 语法。当我们登录 MATLAB 而且输入 fdatool 时，我们得到两个显示屏幕。在一个屏幕上，输入 fdatool 函数作为命令行来设计和分析量化滤波器，而另一个屏幕是一个图形用户界面（GUI），可用作相同服务。GUI 窗口显示如图 7.1a 所示，显示一个有很多选项的对话框，解释如下。

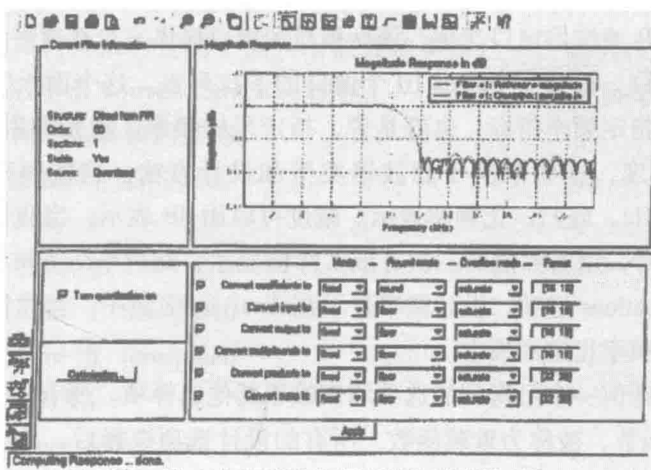
首先，我们在 GUI 窗口使用 FDA 工具或在命令窗口中使用信号处理工具箱设计一个双精度滤波器，然后将其导入 GUI 窗口。在 FDA 工具对话框中，我们可以在 Filter Type 面板上选择以下选项：

1. Lowpass
2. Highpass
3. Bandpass
4. Bandstop
5. Differentiator. 通过单击此特征块，我们得到下列附加选项。
6. Hilbert transformer
7. Multiband
8. Arbitrary magnitude
9. Raised cosine

10. Arbitrary group delay
11. Half - band lowpass
12. Half - band highpass
13. Nyquist



a)



b)

图 7.1　fdatool 窗口屏幕截图

a）滤波器设计窗　b）量化分析窗口

Filter Type 面板下是设计方法面板。当单击 IIR 滤波器时，下拉列表给我们以下选项指定频率响应类型：

- Butterworth
- Chebyshev Ⅰ
- Chebyshev Ⅱ
- Elliptic
- Least - pth norm
- Constrained least - pth norm

FIR 滤波器可选项如下：

- Equiripple
- Least squares
- Window
- Maximally flat
- Least - pth norm
- Constrained equiripple

设计方法面板的右边是滤波器阶数选项。我们要么指定滤波器阶数，要么让程序计算最低阶数（通过使用 SP Tool 函数 Buttord，Chebord 等）。记住，当要设计两个全通滤波器并联时，选择奇数阶低通滤波器，如果给定一个偶数阶数，则作为最小阶数。此面板下面是其他选项面板，可根据上述输入选项。例如，如果选择一个 FIR 滤波器窗口选项，该面板显示窗口提供一个选项供我们选择。通过单击按钮窗口，得到一个超过 10 个窗口的下拉列表。这个面板的右边是两个面板项，用于指定频率指标，也就是说，指定采样频率、通带和阻带截止频率、通带和阻带幅度，这些取决于滤波器类型和设计方法。这些频率可以用 Hz、kHz、MHz、GHz，或归一化频率表示。幅度可以用 dB 表示，当我们单击主菜单中的 Analysis 时，用实际值的二次方或实际值显示，然后单击下拉列表中的 Frequency Specifications 选项。设计频率显示在 Analysis 面板中，当我们开始滤波器设计时，它在频率指定面板上。

这些目录任何一个可得到的选项均依赖于其他选择项。所有 FDA 工具函数，也是 SP 工具函数，被称为重载函数。所有的设计选项选择后，单击对话框底部的 Design Filter 按钮。程序设计滤波器并在 Analysis 区域显示滤波器的幅度响应。但这仅仅是一个默认的选择，再通过单击这个区域上合适的图标，Analysis 区域显示下列特征之一：

- Magnitude response
- Phase response
- Magnitude and phase response

- Group delay response
- Impulse response
- Step response
- Pole - zero plot
- Filter coefficients

单击主菜单栏中 Analysis 项也可以显示这些信息，我们希望选择的信息显示在 Analysis 区域。我们也可以选择一些附加信息，例如，通过单击 Analysis Parameters。在这个下拉列表的底部是 Full View Analysis 选项。当选择此项时，显示在 Analysis 区域的内容在多特征更大空间的新面板上展示，这可以使用 SP 工具图形显示。例如，通过单击 Edit 按钮，然后选择 Figure Properties、Axis Properties 或 Current Object Properties 任何一个，Property Editor 变有效，可以修改这三个对象的属性。

最后，我们看看第一个面板 Current Filter Information。它列出结构、阶数、和我们设计的滤波器部分数量。这些信息下面，它指示滤波器是否稳定，并指出源是否是设计滤波器（即双精度参照滤波器）或与有限字长量化滤波器。IIR 参照滤波器的默认结构是二阶级联结构，FIR 滤波器是直接形式。当我们完成双精度参照滤波器设计后，我们核实是否满足设计要求，如果我们愿意，我们可以将参照滤波器的结构转换为任何下面列出的其他类型之一。我们在主菜单中单击 Edit 按钮，然后单击 Convert Structure 按钮。一个下拉列表显示我们能从默认结构或已经设计的结构转换的结构。

对于 IIR 滤波器，结构如下

1. Direct form Ⅰ
2. Direct form Ⅱ
3. Direct form Ⅰ transposed
4. Direct form Ⅱ transposed
5. Lattice ARMA
6. Lattice - coupled allpass
7. Lattice - coupled allpass —power complementary
8. State space

列表中第 6 和第 7 项是关于两个全通滤波器并行结构，在第 6 章描述过，它们分别是传递函数 $G(z) = [A_1(z) + A_2(z)]/2$ 和 $H(z) = [(A_1(z) - A_2(z)]/2$ 。全通滤波器 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 以网格全通结构实现，就像图 6. 19b 所示那样。MA 和 AR 结构是网格 ARMA 的特殊情况，这也已在第 6 章讨论过。

对于 FIR 滤波器，结构选项如下

- Direct - form FIR
- Direct - form FIR transposed
- Direct - form symmetric FIR

当我们转换成一个新结构时，显示在 Analysis 区域的信息，如滤波器系数，会发生变化。我们还想指出，任何一个我们设计的低通、高通、带通和带阻滤波器都可以转换成其他类型，通过单击对话框中左栏上的第一个图标，为新滤波器添加频率指标。

7.3 量化滤波器分析

当我们完成了参考滤波器分析，可以转向构建量化滤波器对象，通过单击 Analysis 区域栏的后一个图标和左手栏的第二个图标设置量化参数。在 Analysis 区域下面的面板现在变成如图 7.1b 所示。我们能用 FDA 工具构造三个对象：qfilt、qfft 和 quantizer。每一个都有一些特性，而且这些特性值可能是字符串或数值。目前我们使用对象 qfilt 和 quantizer 分析被量化参照滤波器的性能。当我们单击 Turn Quantization On 按钮和 Set Quantization Parameters 图标，我们能选择滤波器系数的量化参数。滤波器系数量化就足以发现有限字长对量化滤波器的幅度响应、相位响应及群延迟响应的影响，它可与 Analysis 区域显示的参照滤波器响应进行比较分析。当我们不得不过滤输入信号时，下列其他数据量化是必要的：

- The input signal
- The output signal
- The multiplicand: the value of the signal that is multiplied by the multiplier.
- The product of the multiplicand and the multiplier constant
- The output signal

quantizer 对象用于转换这些数据，这个对象有 4 个特性：Mode、Round Mode、Overflow mode 和 Format。为了理解这些特性值，有必要复习和理解二进制数字表达和相乘相加的不同结果。这些将在下面讨论。

7.4 二进制数和运算

信号、滤波器和差分方程系数或递归算法及对应滤波器结构的其他特性等值的数字表示使用二进制形式。它们基于基数 2，因此只由两个二进制数字（0 和 1）组成，通常称为比特，正如十进制数基数由 0 到 9 十个数字组成。在一个字符串中，比特数位决定着二进制数，如 $x_2 = 1001_{\Delta}1010$，相当于 $x_{10} = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^3 + 2^{-1} + 2^{-3} = 9.625$。在这个二进制数表示讨论中，我们使用符号 Δ 分离整数

部分和小数部分，下标 2 和 10 表示二进制数和十进制数。另一个例子如下

$$x_2 = b_2 b_1 b_{0\Delta} b_{-1} b_{-2} b_{-3} b_{-4} \tag{7.1}$$

其十进制值计算如下

$$x_{10} = b_2{}^2 + b_1{}^1 + b_0{}^0 + b_{-1}^{-1} + b_{-2}^{-2} + b_{-3}^{-3} + b_{-4}^{-4} \tag{7.2}$$

这里位 b_2，b_1、b_0，b_{-1}，b_{-2}，b_{-3}，b_{-4} 为 1 或 0。一般来说，当 x_2 表示为

$$x_2 = b_{I-1} b_{I-2} \cdots b_1 b_{0\Delta} b_{-1} b_{-2} \cdots b_{-F} \tag{7.3}$$

其对应十进制数值为

$$x_{10} = \sum_{i=-F}^{I-1} b_i 2^i \tag{7.4}$$

在式（7.3）二进制表示中，整数部分包含 I 位和最左 b_{I-1} 位被称最高有效位（MSB）；小数部分包含 F 位，最右 b_{-F} 位被称为“最低有效位（LSB）”。这只能代表正数大小，被称为无符号定点二进制数。为同时表达正数和负数，需要一位符号位添加到 MSB 左边。符号位由 s 表示如式（7.5）所示，当此位为 1 时，分配负符号，为 0 时，分配正符号。所以它变成一个有符号的定点二进制数。因此一个有符号数 $x_2 = 11001_\Delta 1010$ 的十进制数 $x_{10} = -9.625$。一般来说，有符号大小定点数表达式如下

$$x_{10} = (-1)^s \sum_{i=-F}^{I-1} b_i 2^i \tag{7.5}$$

位数的总数量称为字长 $w = 1 + I + F$。当两个有符号数需要相加的整数部分值和/或小数部分值相差很大，很不容易用数字硬件编程实现此类操作。所以通常的做法是选择 $I = 0$，在有符号大小定点数表达时，只保持符号位和位的小数部分位数关系 $F = w - 1$。但是，当两个数字的十进制值大于 0.5 时，它们的总和大于 1，这不能用上面的格式表示，其中 $I = 0$。所以，两个其他表示数字的形式更为常用：一次补数和二次补数形式（也称为 one - complementary 和 two - complementary 形式）用来表示有符号大小定点数。一次补数形式的小数部分位数用的它补值取代，也就是说，所有 1 用 0 取代，反之亦然。通过给一次补数形式的最低有效位加 1，我们得到二次补数二进制表示形式；符号位在两种形式保持不变。但必须注意当二进制数为正时，有符号数大小形式、一次补数形式和两次补数形式是一样的。

例 7.1

给定：$x_2 = 0_\Delta 1100$ 是 5 位，有符号大小定点数等于 $x_{10} = +2^{-1} + 2^{-2} = 0.75$ 和 $v_2 = 1_\Delta 1100$ 等于 $v_{10} = -0.75$。$v_2 = 1_\Delta 1100$ 的一次补数形式是 $1_\Delta 0011$，而 v_2 的二次补形式是 $1_\Delta 0011 + {}_\Delta 0001 = 1_\Delta 0100$。

一个二进制有符号大小定点数值的表示范围从 $-2^{w-F-1} \sim 2^{w-F-1} - 2^{-F}$。为了增加数字表示范围，可以使用多种格式：浮点和块浮点表示。浮点二进制数表示形式

$$X_{10} = (1)^s M(2^E) \tag{7.6}$$

M 是尾数，通常由一个有符号定点二进制数表示，E 是一个 E 位正整数或负整数，被称为“指数”。为得到两个正整数和负整数指数，有一个偏差是整数，当指数 E 是 8 位时，通常选择偏差是 $e^7-1=127$ 或当 E 是 11 位时，选择 $e^{10}-1=1023$。无偏差下，一个 8 位整数范围为 0 ~ 255，但是偏差 127 时，指数从 −127 ~ 127变化。同样小数部分大小 F 限于 $0 \leqslant M < 1$。为了增加尾数范围，超过一位被添加到最高有效位 F，以表示为（1. F）。现在，它被认为是标准，但这一位并不计入总字长。

在 DSP 中，用于表示浮点数的 IEEE 754 − 1985 标准是最常用的标准。它使用 32 位单精度格式与 64 位双精度格式。

单精度浮点数表示如下

$$X_{10} = (-1)^s (1.F) 2^{E-127} \tag{7.7}$$

根据这个标准，（32 位）单精度浮点数使用一个符号位、8 位指数和 23 位小数部分 F（和 1 位归一化）。这种格式的表示如图 7.2a 所示。但是这个公式是根据以下规则来实现的，以满足下面列出的第一个以外的条件：

1）当 $0<E<255$ 时，$X_{10}=(-1)^s(1_\Delta F)2^{E-127}$。

2）当 $E=0$ 及 $M\neq 0$ 时，$X_{10} = (-1)^s(0_\Delta F)(2^{-126})$。

3）当 $E=255$ 及 $M=0$ 时，X_{10}不是一个数，表示为 NaN。

4）当 $E=255$ 及 $M=0$ 时，$X_{10} = (-1)^s\infty$。

5）当 $E=0$ 及 $M=0$ 时，$X^{10} = (-1)^s(0)$。

这里，（$1_\Delta F$）是一个整数位和 23 个小数位的标准差，而（$0_\Delta F$）只有 23 位的小数部分。虽然也有 64 位处理器可用，但大多数的商业 DSP 芯片使用 32 位、单精度、浮点二进制数表示。请注意，这些芯片没有提供用于存储二进制点（Δ）；它们的寄存器仅存储数据位并实现上述规则。二进制点仅仅是我们讨论二进制数表示的符号标识，并不计入总数据位。

IEEE 754 − 1985 标准（64 位）、双精度浮点数表示如下

$$X_{10} = (-1)^s (1.F) 2^{E-1023} \tag{7.8}$$

它使用一个符号位，指数 E 为 11 位，F 为 52 位（添加 1 位标准位，但不计入总数）。这种格式的表示如图 7.2b 所示。

例 7.2

考虑 8 位无偏指数 16 位浮点数和非标准 4 位小数部分，即 $E=8$ 和 $F=4$。二进制数表示为

$$X_2 = 0100000010_\Delta 0110$$

指数 $E_2 = 100000010$；因此 $E_{10} = 130$，非标准化尾数 $F_2 = {}_\Delta 0110$，$F_{10} = 0.375$。因此，标准化尾数 $M = 1.375$。最后 $X_{10} = -(1.375)2^{130-127} = +(1.375)2^3 = 11$。

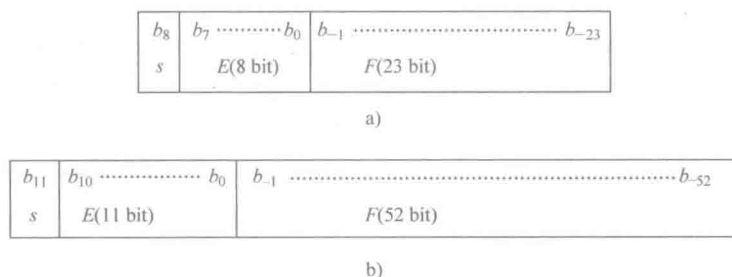


图 7.2　32 位和 64 位浮点数 IEEE 格式

考虑另一个例子：

$$Y_2 = 100000111_{\Delta}0110$$

然后 $E_2 = 00000111$，$E_{10} = 7$，$F_2 = {}_{\Delta}0110$，$F_{10} = 0.375$，最后 $Y_{10} = -(1.375)2^{7-127} = (-1.375)2^{-120}$。

支持 FDA 工具箱以及 SP 工具箱浮点数的动态范围如表 7.1 所示。

表 7.1　FDA 工具浮点数的动态范围

浮点数据的类型	标准化的极小值	标准化的极大值	指数偏差	精度
单精度	2^{-126} $\approx 1.18\ (10^{-38})$	$(2-2^{-23})\ 2^{127}$ $\approx\ (3.4)\ 10^{38}$	127	2^{-23} $\approx 10^{-7}$
双精度	2^{-1022} $\approx 2\ (10^{-308})$	$(2-2^{-52})\ 2^{1023}$ $\approx\ (1.7)\ 10^{308}$	1023	2^{-52} $\approx 10^{-16}$
经验值的精度	$2^{1-\text{bias}}$	$(2-2^{-F})\ 2^{\text{bias}}$	$2^{E-1}-1$	2^{-F}

当参照滤波器被量化，我们注意到量化数据的默认值如图 7.1b 所示，它是 16 位有符号定点二进制数，按格式［16 15］显示，这意味着 15 位用于小数部分和 1 位用于符号位。但注意量化器积与和的默认格式为[32　30]。

在显示不同数据量化的同一面板中，有两个其他列为 Round Mode 和 Overflow Mode。当我们单击 Round Mode 按钮，得到以下下拉列表选项：

1. Round：round
2. Floor：floor
3. Ceiling：ceil
4. Fix：fix
5. Convergent：convergent

“Rounding” 操作是选择最近的量化值。介于两个量化级别之间小于一半距离值的负值被负无限舍入，介于两个量化级别之间小于一半距离值的正值正限舍

入。如果数刚好位于两个级别中间，则正无限舍入。“floor”操作通常被称为truncation，因为它丢弃所有 b 位之外的位，这产生一个负无限接近的数。这两个是最常用的二进制算术操作。如图 7.3 所示，虚线表示实际值 x，实线表示 b 位量化值 x_Q。

ceiling 操作正无限舍入接近于量化级别的数值，fix 操作零接近舍入量化级别值。Convergent 操作和 Rounding 操作几乎一样，除了恰好在两个量化级别中间数量的情况，如果倒数第二位是零，下舍为整数，如果是 1，则上舍为整数。

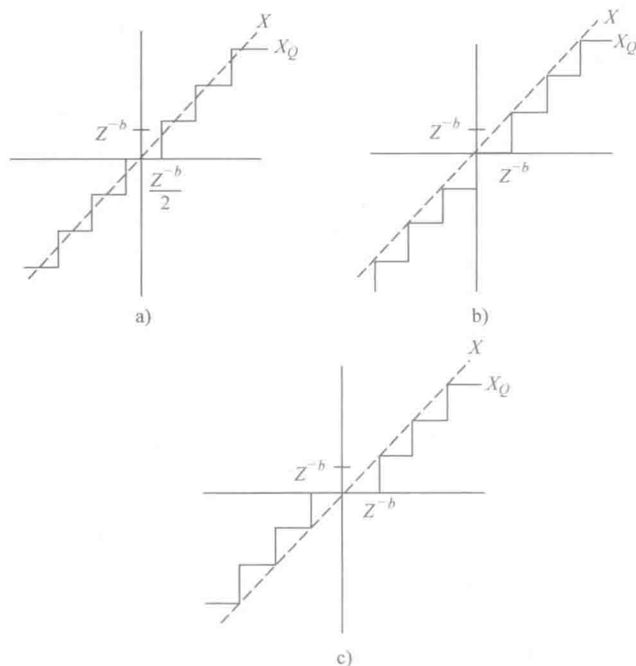


图 7.3　二进制数的舍入和截断过程

a）舍入 $-\frac{Z^{-b}}{2}<(X_Q-X)\leqslant\frac{Z^{-b}}{2}$　b）截断（二次补形式）$-Z^{-b}<(X_Q-X)\leqslant 0$

c）截断（一次补形式和有符号量值）$-Z^{-b}<(X_Q-X)\leqslant 0$, $X>0$ $0\leqslant(X_Q-X)<Z^{-b}$, $X<0$

假设两个 b 位定点格式的正数或负数相加，结果有可能可能超过 b 位数据范围的下限或上限。一个有符号定点数，字长为 w，小数部分长度为 f，其数值范围从 -2^{w-f-1} 到 $2^{w-f-1}-2^{-f}$，而浮点数的范围如表 7.1 所示。当两个定点数的和或差或两个浮点数的积超过其正常范围时，将会有数的溢出或下溢。FDA 面板的量化滤波器 ovflow mode 给了两种选择：saturate 或 wrap。选择 saturate 模式设置超过正常范围的值到最大与最小值范围内，也就是说，在一定范围内，值大于最大值设置为最大值，值小于最小值设置为最小值。这是默认的

溢出模式选择。

还有第三个选择：标定所有数据。这个选择通过单击 Optimization 按钮进行。然后从显示的对话框中，使用附加的步骤来调整量化参数，标定系数而不改变滤波器响应的总增益，等等。滤波器系数比例适当可实现每一部分输出没有数据溢出或下溢出。

在研究有限字长影响和许多实现结构之前，通过使用 FDA 工具对话框中的所有选项，从大量的此类复杂问题研究知道一些有用的见解是很有用的。人们已经发现，一般来说，二阶部分级联连接的 IIR 滤波器，每部分都用直接Ⅱ型实现，较用直接Ⅰ型和直接Ⅱ型混合实现的滤波器对量化敏感性较弱。网格 ARMA 结构和特殊情况的 AR 结构比上述默认结构对量化效应更不敏感。网格－耦合全通结构，也被称“双全通并联结构，“不如网格 ARMA 结构对量化敏感。我们将决定是否用具有进一步减少量化影响的优点的网格全通结构实现两个全通滤波器 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$。如果要求的频率响应可以用 FIR 滤波器实现，那么直接形式或网格 MA 结构实现它比上述结构更受到喜欢，因为 FIR 滤波器软件开发和硬件设计简单，总是稳定的，具有线性相位，而且无极限环存在。

我们首先设计参照滤波器满足设计要求，然后对不同等级和不同量化类型的量化滤波器尝试不同的结构。比较参照滤波器和量化滤波器的频率响应、相位响应和群时延响应，我们找出参照滤波器的哪一种结构具有最小偏离的频率响应、相位响应等，也有最小的字长。FDA 工具提供了强有力的尝试大量可用选项的工具，包括滤波器类型、设计方法、频率要求、几个系数量化，和其他变量的辅助工具，而且比较参照滤波器与量化滤波器结果，它允许我们做出一个次优滤波器选择。这将在后面的例子说明。

7.5　IIR 滤波器的量化分析

让我们选择与例 6.17 相同的五阶 IIR 低通椭圆滤波器为例。其传递函数 $G(z)$

$$G(z)=\frac{0.1397}{1.965}\times\frac{1+1.337z^{-1}+2.251z^{-2}+2.251z^{-3}+1.337z^{-4}+z^{-5}}{1-1.629z^{-1}+2.256z^{-2}-1.597z^{-3}+0.8096z^{-4}-0.1866z^{-5}} \tag{7.9}$$

滤波器的频率要求是 $\omega_p=0.4$，$\omega_s=0.6$，$A_p=0.3\text{dB}$，和 $A_s=35\text{dB}$。传递函数 $G(z)$ 被分解为两个全通滤波器 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 之和，使 $G(z)=[(A_1(z)+A_2(z)]/2$，其中

$$A_1(z)=\frac{0.5089-0.6763z^{-1}+z^{-2}}{1-0.6763z^{-1}+0.5089z^{-2}} \tag{7.10}$$

$$A_2(z) = \left(\frac{0.8805 - 0.5368z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.5367z^{-1} + 0.8805z^{-2}}\right)\left(\frac{-0.4165 + z^{-1}}{1 - 0.4165z^{-1}}\right) \tag{7.11}$$

重新集合第6章计算的实现 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 网格结构的网格系数如下：

对于 $A_1(z)$：

$$K1 = \begin{bmatrix} -0.4482 \\ 0.5089 \end{bmatrix}$$

$$V1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于 $A_2(z)$：

$$K2 = \begin{bmatrix} -0.2855 \\ 0.8805 \end{bmatrix}$$

$$V2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K3 = [\,-0.4165\,]$$

$$V3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

现在通过在 MATLAB 命令窗口输入 fdatool 登录到 FDA 工具箱而进入下列要求：在 infinite precision 条件下设计参照滤波器。这是一个低通、IIR 椭圆滤波器，采样频率 = 48000Hz，$F_{\text{pass}} = 9600\text{Hz}$，$F_{\text{stop}} = 14400\text{Hz}$，分别对应归一化采样频率 = 2，$F_{\text{pass}} = 0.4$，$F_{\text{stop}} = 0.6$。最大的通带衰减设置为 $A_{\text{p}} = 0.3\text{dB}$ 和最小阻带衰减$A_{\text{s}} = 35\text{dB}$。当我们设计这个滤波器时，发现滤波器的最小阶数是4，因此我们将它提升到5作为滤波器的阶数，以便我们能用并行全通网络实现，并与其他类型滤波器的频率响应比较。有了这个选择，频率响应和相位响应显示在 Analysis 区域，如图7.4所示。IIR 参考滤波器的分子和分母系数给出如下。

这个参考滤波器的分子系数（归一化产生相对1的常数分子系数）是

1. 000000000000

1. 337660698390

2. 251235030190

2. 251235030190

1. 337660698390

1. 000000000000

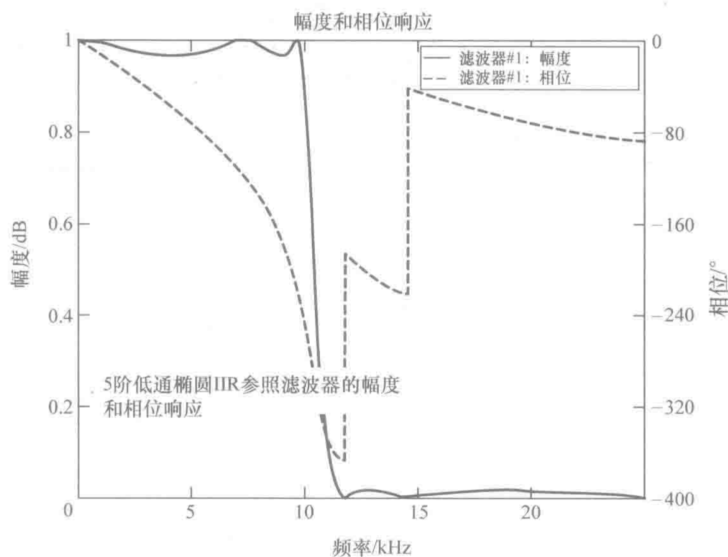


图 7.4　IIR 椭圆低通滤波器（参照滤波器）的幅度响应

分母系数是

1.000000000000000
-1.629530257267632
2.257141351394922
-1.598167067780082
0.809623494277134
-0.186626971448986

正如预期，在 4 位精度范围内结果与方程（7.9）系数匹配，因为两个滤波器是由同一信号处理工具箱函数 ellip 设计的。

接下来，我们开启量化，并单击 Set Quantization Parameters 按钮。量化参数都设置为默认值，与图 7.1 所示类似。我们改变滤波器定点系数格式，从 [16 15] 到 [9 8]，不用改变任何其他数据格式——尽管大多数目前 DSP 芯片使用 16 位或 32 位。当我们量化滤波器系数到 9 位字长时，两个二阶部分和一阶部分用直接Ⅱ型级联后的幅度响应，如图 7.5 所示，同时有参照滤波器的幅度响应。

图 7.6 用分贝展示了通带的放大图，给出了量化滤波器的响应与参照滤波器非常接近。但是市场上大部分 DSP 芯片字长是 2 的整数幂（字长 8，16，32 等）。所以我们尝试一个 8 位量化，滤波器幅度响应如图 7.7 所示。但我们看到，

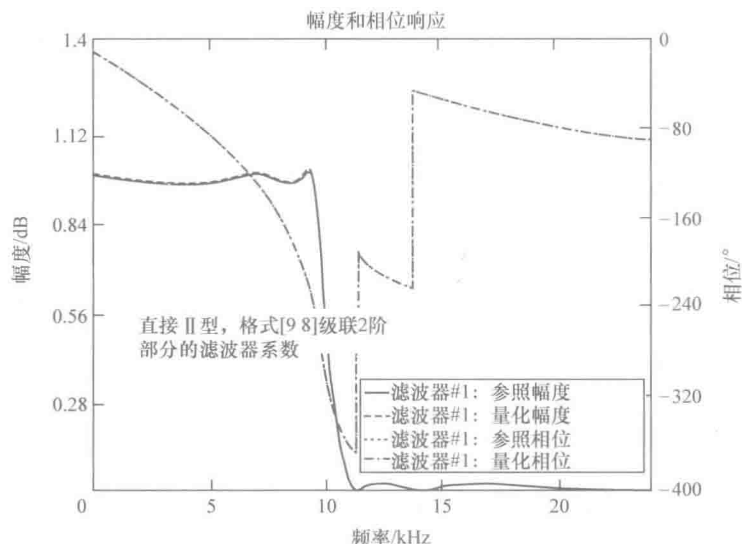


图 7.5　参照滤波器和量化滤波器（2 阶部分级联格式［9 8］）幅度响应

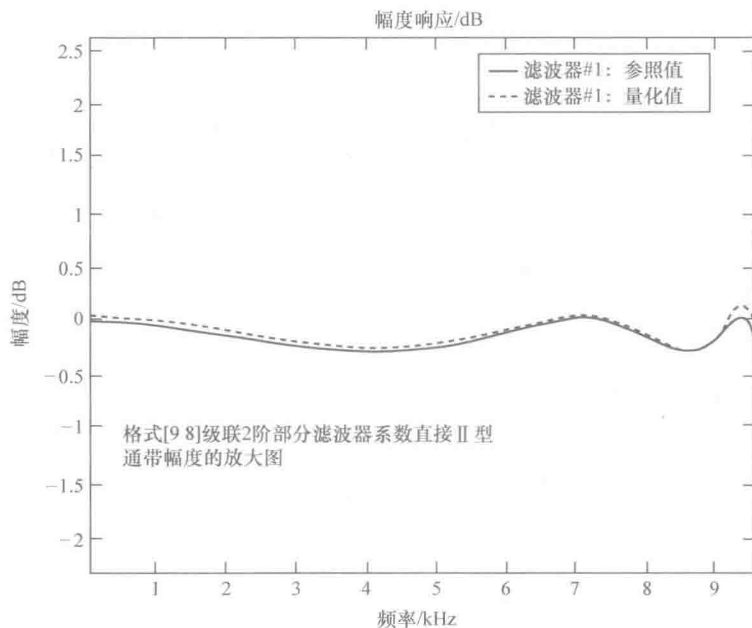


图 7.6　图 7.5 两个滤波器幅度放大图（用 dB 表示）

幅度与参照滤波器的幅度偏差在通带边缘附近非常明显。虽然我们倾向于选择 8 位字长，而不是 9 位字长，但这个偏差过度，所以我们必须选择其他结构。作为一个可选择的结构，我们转换直接Ⅱ型到 ARMA 结构，选择同样的 8 位字长，

幅度响应结果如图 7.8 所示。这个响应通带放大图如图 7.9 所示。对于图 7.7 显示的 8 位字长直接Ⅱ型默认结构的量化滤波器响应并没有明显有意义的改进。

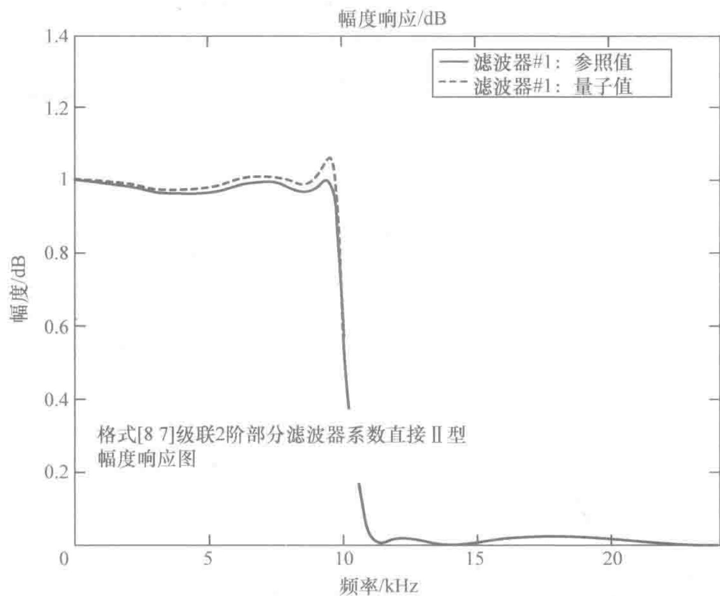


图 7.7 格式［8 7］级联 2 阶部分参照滤波器和量化滤波器幅度响应

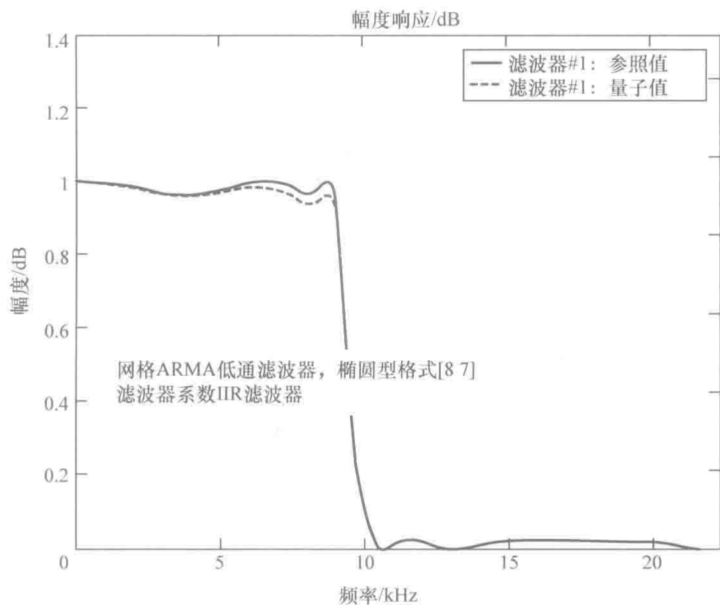


图 7.8 格式［8 7］网格 ARMA 结构的参照滤波器和量化滤波器幅度响应

所以我们决定将网格 ARMA 结构转换为网格耦合全通结构；每个全通结构

由网格全通结构实现，滤波器系数为9位定点量化，我们得到结果如图7.10所示。参用格式［9 8］，参照滤波器和量化滤波器几乎没有任何区别，与9位直接Ⅱ型结构相同。

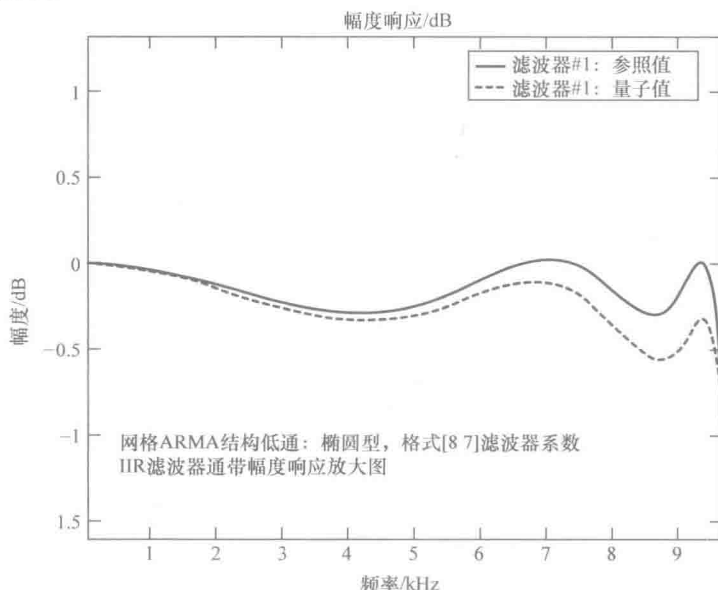


图7.9 格式［8 7］网格ARMA结构参照滤波器和量化滤波器幅度响应放大图（dB）

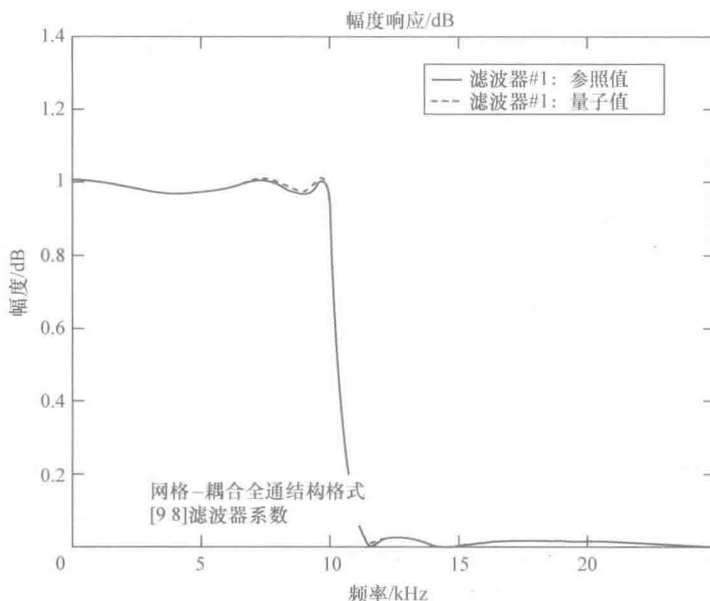


图7.10 格式［9 8］量化网格–耦合全通结构幅度响应

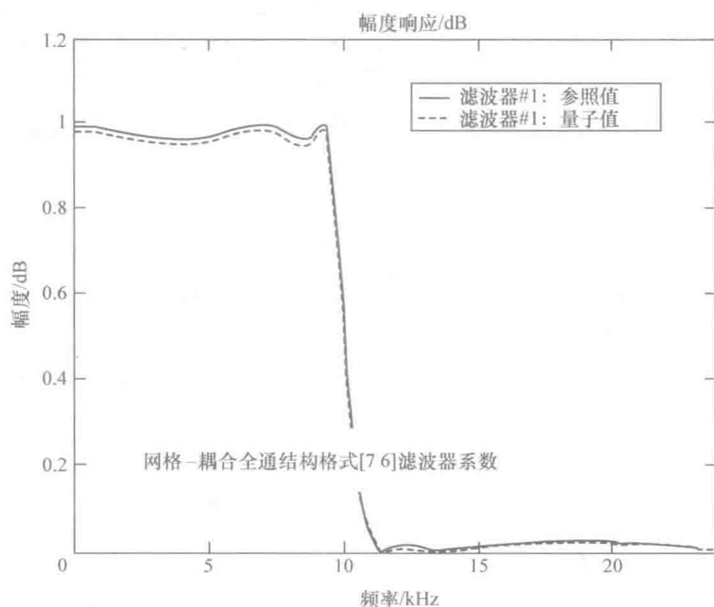


图 7.11 格式 [7 6] 网格 - 耦合全通结构参照滤波器和量化滤波器幅度响应

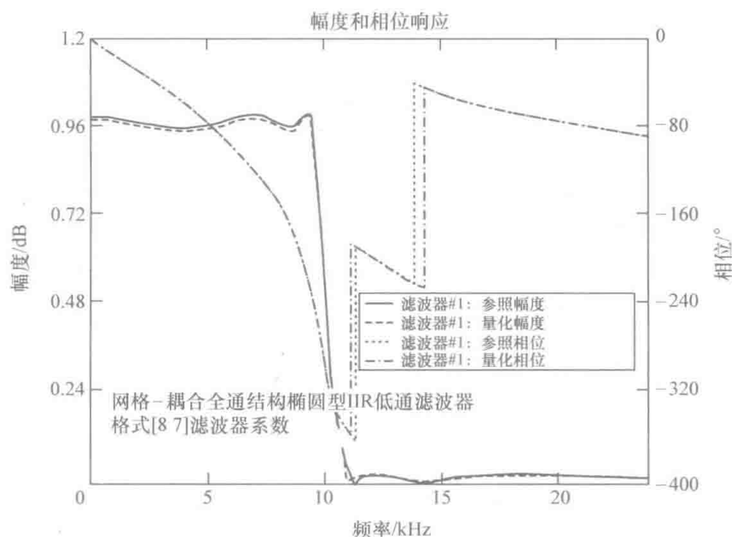


图 7.12 格式 [8 7] 网格 - 耦合全通结构参照滤波器和量化滤波器幅度和相位响应

接着，我们对这个结构尝试 7 位字长，幅度响应如图 7.11 所示。再一次，我们更愿意为这个结构选择 8 位字长。8 位字长滤波器的幅度和相位响应如图 7.12 所示。这个 8 位滤波器通带幅度响应放大图的分贝表示如图 7.13 所示。它表明参照滤波器的最大衰减是 0.3dB，与要求一样，对于量化滤波器，指定通带幅度偏差约为 0.1dB。这个偏差数量小于图 7.9 网格 ARMA 滤波器结果。因此 IIR 滤波器的网格耦合全通结构是折中选择。

二阶全通滤波器 $A_1(z)$ 网格系数和实现参照滤波器的三阶全通滤波器 $A_2(z)$ 对应系数被打印在图 7.14 右列。在四位精度范围内，两个全通滤波器网格系数显示在图 7.14 中与本部分开始的给定向量 K1，V1，K2，V2，k3 V3 匹配。在左侧列中显示的是定点 8 位字长［8 7］有符号大小格式量化滤波器对应系数。

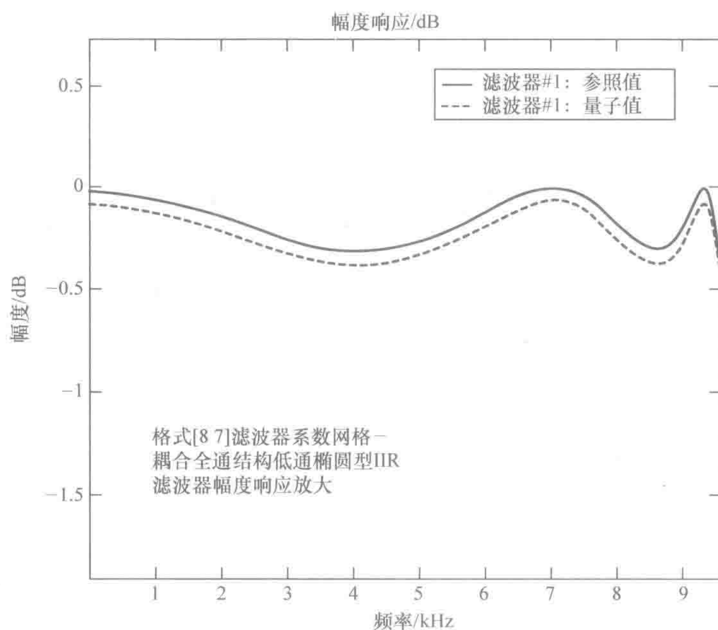


图 7.13 格式［8 7］网格－耦合全通结构参照滤波器和量化滤波器幅度响应放大图（dB）

```
Quantized Lattice coupled-allpass filter
Lattice1
     QuantizedCoefficients{1}    ReferenceCoefficients{1}
  (1)              -0.4453125  -0.448202538502541490
  (2)               0.5078125   0.508902517834580630
Lattice2
     QuantizedCoefficients{2}    ReferenceCoefficients{2}
  (1)              -0.3359375  -0.338701369319380500
  (2)               0.8750000   0.871154661800650490
  (3)              -0.3671875  -0.366724401842417720
beta
     QuantizedCoefficients{3}    ReferenceCoefficients{3}
+ (1)               0.9921875  1.000000000000000200

   FilterStructure = latticeca
       ScaleValues = []
  NumberOfSections = 1
  StatesPerSection = [5]
 CoefficientFormat = quantizer('fixed', 'round', 'saturate', [8  7])
       InputFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16  15])
      OutputFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16  15])
MultiplicandFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16  15])
     ProductFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [32  30])
         SumFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [32  30])
Warning: 1 overflow in coefficients.
```

图7.14　格式［8 7］网格－耦合全通结构参照滤波器和量化滤波器参数

7.6 FIR滤波器量化分析

接下来我们研究设计一个量化FIR滤波器的其他选择是否会给我们一个较好的结果。选择与IIR低通椭圆滤波器相同的频域指标，我们设计等波纹通带和阻带的FIR低通滤波器。参照滤波器为Infinite precision使用remez算法并产生一个十六阶线性相位FIR（Ⅰ型）。这个滤波器的幅度响应如图7.15所示。当我们选择7位和8位字长有符号大小定点数时，结果分别如图7.16和图7.17所示。

很显然，7位和8位字长的两个滤波器没有显著差异。在图7.18中，我们绘制了8位字长FIR滤波器通带幅度放大图（用dB表示）。与设计通带波纹的最大偏差是0.3～0.1dB。参照滤波器和量化滤波器系数在图7.19列出。注意量化滤波器的量化系数有下溢出，正如第一列数字0位指示而且被舍入到0。

最后，我们通过比较图7.18和图7.13所示的幅度响应来比较对IIR滤波器和FIR滤波器的量化效果。很容易注意到，FIR滤波器比上面的IIR滤波器对量化的敏感性更低。网格耦合结构IIR滤波器和直接型FIR滤波器都有8位字长。因为其系数的对称性，直接型FIR滤波器要求乘法器的数量只有9个，而网格－耦合全通滤波器网络要求10个乘法器，差别不大。然而，FIR滤波器相位响应是线性，比IIR滤波器有很大优势。FIR滤波器的硬件实现比IIR

滤波器更简单。不同于 IIR 滤波器，FIR 滤波器不会出现极限环而且总是稳定

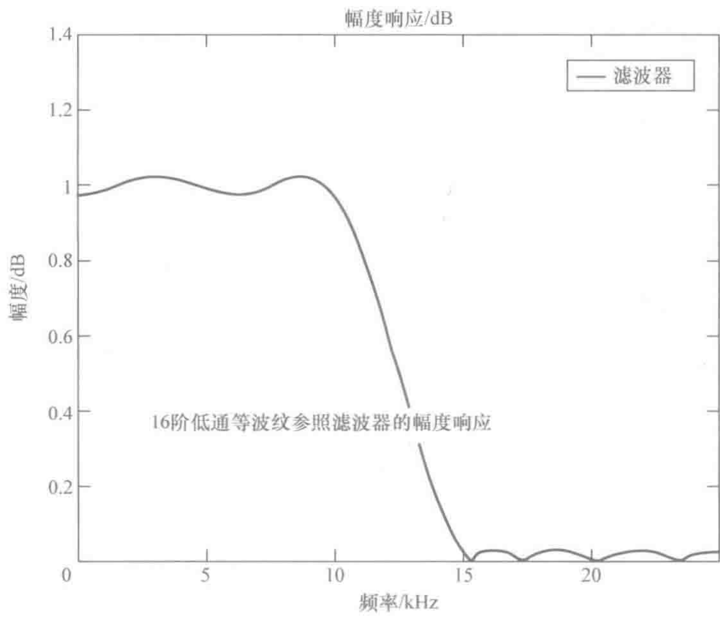


图 7.15 低通等波纹 FIR 滤波器（参照滤波器）幅度响应

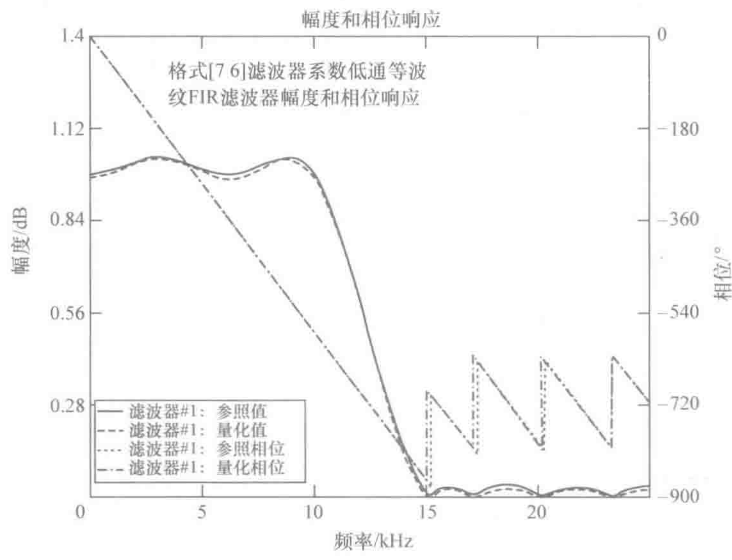


图 7.16 格式［7 6］滤波器系数参考 FIR 滤波器和量化滤波器幅度和相位响应（dB）

的。这导致进一步研究 8 位 FIR 滤波器作为 DSP 编程实现生成代码的目标选择。

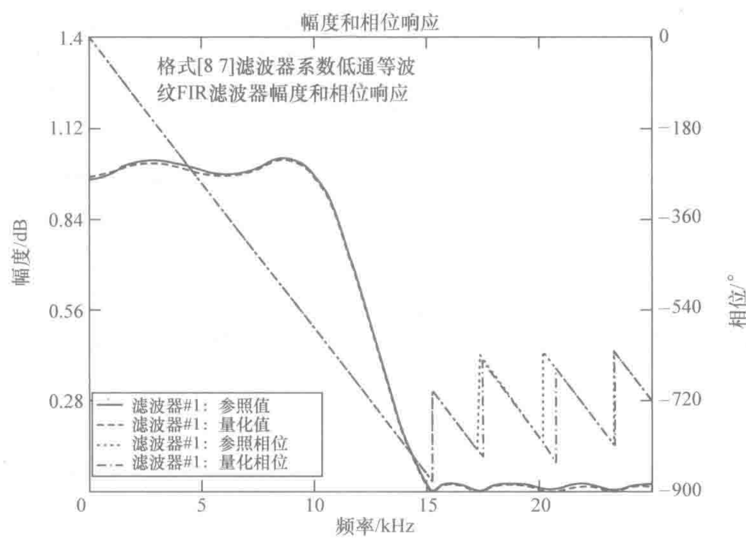


图 7.17　格式［8　7］滤波器系数 FIR 参照滤波器和量化滤波器幅度和相位响应

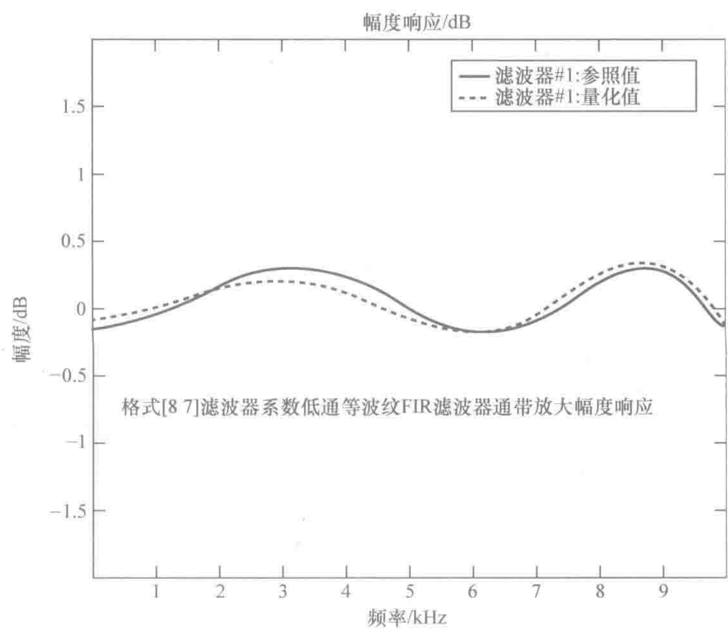


图 7.18　格式［8　7］滤波器系数参照 FIR 滤波器和量化滤波器放大幅度响应（dB）

必须指出，我们选择的数字滤波器指标可能会或也可能不会满足典型的应用需求。同时，我们想指出，虽然我们认为一个 8 位字长比 9 位字长可能更可取，

```
Quantized Direct form FIR filter
Numerator
      QuantizedCoefficients{1}    ReferenceCoefficients{1}
0 ( 1)               0.0000000   0.000278615600941334
  ( 2)              -0.0234375  -0.026495003913332794
0 ( 3)               0.0000000  -0.000221811497688629
  ( 4)               0.0468750   0.044103186729025759
0 ( 5)               0.0000000   0.000251054558481910
  ( 6)              -0.0937500  -0.093412121343936769
0 ( 7)               0.0000000  -0.000289785456229263
  ( 8)               0.3125000   0.313920929416822760
  ( 9)               0.5000000   0.500313133105531720
  (10)               0.3125000   0.313920929416822760
0 (11)               0.0000000  -0.000289785456229263
  (12)              -0.0937500  -0.093412121343936769
0 (13)               0.0000000   0.000251054558481910
  (14)               0.0468750   0.044103186729025759
0 (15)               0.0000000  -0.000221811497688629
  (16)              -0.0234375  -0.026495003913332794
0 (17)               0.0000000   0.000278615600941334

   FilterStructure = fir
       ScaleValues = []
  NumberOfSections = 1
  StatesPerSection = [16]
 CoefficientFormat = quantizer('fixed', 'round', 'saturate', [8  7])
       InputFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16  15])
      OutputFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16  15])
MultiplicandFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [16  15])
     ProductFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [32  30])
         SumFormat = quantizer('fixed', 'floor', 'saturate', [32  30])
```

图 7.19 FIR 参照滤波器和 8 位字长量化滤波器数据

但目前大部分的数字信号处理器（DSP）是 16 位或 32 位设备。使用 fdatool 的设计过程仅仅是为了说明一个工程师在确定一个特定数字滤波器之前所要面临的不同选择和决定，其进一步研究考虑将下面描述。

现在假设我们已经设计了数字滤波器，已经使用 fdatool 测试了其性能，此时滤波器系数和输入样本由有限数量的位数表示。我们也考虑了四舍五入相加相乘信号结果和滤波器系数的影响，并证实没有极限环存在的可能性或滤波器的不稳定操作。通常数字滤波器是数字系统如蜂窝电话的重要组成部分，除了电源、键盘，或其他 I/O 接口外还有其他组件。所以我们必须仿真以模块图形式连接所有组件在一起的整个系统的性能。

7.7 小结

本章描述了 MATLAB 工具的使用，称为 fdatool，利用其设计有限字长的定点和浮点系数数字滤波器，研究了滤波器的不同类型和幅度响应指标的不同类型。一旦我们缩小了满足频率响应要求的滤波器选择，我们要用 Simulink 仿真滤

波器的性能，检查滤波器用于实际的不同类型输入信号下时其工作是否符合要求。在第 8 章，我们将讨论这个问题和其他必需的实际考虑因素，其对滤波器硬件设计或嵌入式滤波器数字系统都很必要。

习题

第 4 章中给出的习题可定为家庭作业或作为学校、学院或大学计算机装有 MATLAB 和信号处理工具箱及可用 FDA 工具的一个学期项目。可以要求学生研究第 4 章要求的滤波器的量化效应，并使用这些工具达到一个次优选择。

参考文献

1. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing—A Computer Aided Approach*, McGraw-Hill, 1998.
2. E. C. Ifeachor and B. W. Jervis, *Digital Signal Processing, A Practical Approach*, Prentice-Hall, 2002.
3. A. Bateman and I. Paterson-Stephens, *The DSP Handbook, Algorithms, Applications and Design Techniques*, Prentice-Hall, 2002.
4. S. K. Mitra and J. F. Kaiser, eds., *Handbook of Digital Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1993.
5. S. M. Kuo and B. H. Lee, *Real-Time Digital Signal Processing: Implementations, Applications and Experiments with TMS320C55X*, Wiley, 2001.
6. A. Singh and S. Srinivasan, *Digital Signal Processing*, Thompson Books/Cole Publishing, 2004.
7. N. Kehtarnavaz and B. Simsek, *C6x-Based Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 2000.
8. P. Lapsley, J. Bier, A. Shoham, and E. Lee, *DSP Processor Fundamentals*, IEEE Press, 1994.
9. S. M. Kuo and W.-S. Gan, *Digital Signal Processors: Architectures, Implementations and Applications*, Pearson Prentice-Hall, 2004.
10. R. Chassaing, *Applications Using C and the TMS320C6XDSK*, Wiley, 2002.
11. R. Chassaing and D. W. Horning, *Digital Signal Processing with the TMS320C25*, John Wiley, 1990.
12. The Mathworks, Inc., *Learning Simulink, User's Guide*, 1994.

第 8 章　使用 DSP 芯片设计硬件

8.1　简介

在第 7 章，我们使用 fdatool 工具例举了数字滤波器分析和设计，其中滤波器的系数和输入样本是有限的比特位数。我们还发现信号相加或信号与滤波器系数相乘值舍入或截断的影响，而且证实滤波器不存在极限环和不稳定运算的可能性。在选择的实例中，我们确定一个 FIR 滤波器拥有 8 位字长将满足一个低通椭圆滤波器的频域响应指标。然而，经常使用数字滤波器作为一个数字系统的主体部分，如手机，还包括其他部件如电源，键盘或其他 I/O 接口，所以我们必须仿真整个系统性能，所有系统组件以框图形式连在一起。

8.2　Simulink 和 Real – Time Workshop

Simulink 是 MATLAB 工具箱软件，用于建模和仿真不同条件下的动态系统性能。正如 MATLAB 有很多工具箱，Simulink 有许多被称为模块集的工具库接口，如 DSP 模块集、定点运算模块集、通信模块集与控制模块集，如图 8.1 左半边所示。

Simulink 浏览器库包含航空和机械系统仿真模块集，即 aerospace blockset 和 simMechanics㊀。每个模块集包含大量模块，用于定义具体传递函数或算法和各种输入信号。

GUI 接口用于从模块集中拖拽和释放功能模块进行连接构成动态系统框图表示，这些系统可以是连续时间系统也可以是离散时间系统。

一种机械系统模型[6] 如图 8.1 所示。Simulink 基于面向对象编程，模块被表示为适当属性的对象，通常在一个对话框中指定。事实上，我们在第 7 章使用的 fdatool 可作为一个对象从 Simulink 或 MATLAB 命令窗口启动，因为二者以无缝方式操作集成在一起。Simulink 可以通过在命令窗口输入 simulink 或者单击工具栏中的 Simulink 图标启动。

㊀ Simulink 版本不同，可能并不包含本章提到的模块。

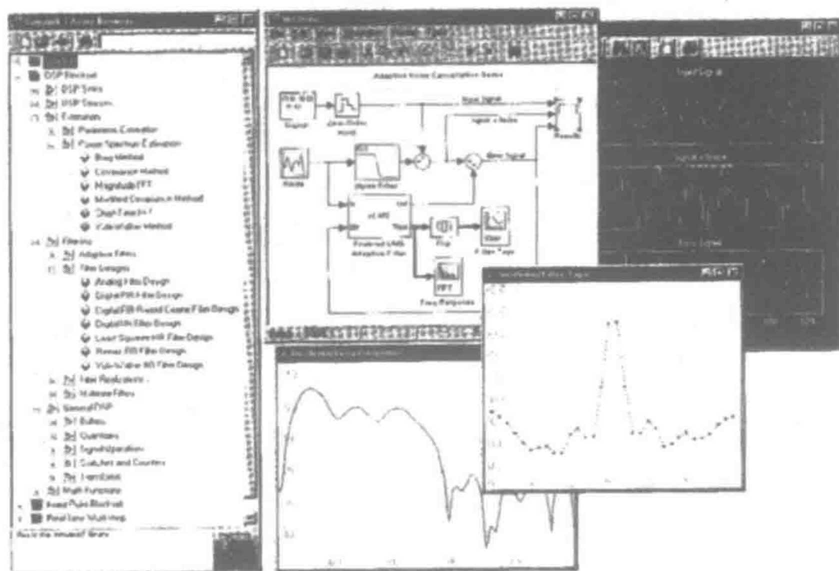


图 8.1　Simulink 浏览器及一个模型框图的屏幕截图

对于数字滤波器仿真，我们选择 DSP 模块集，其树结构中包含以下模块：

DSP 模块集

```
→DSP Sinks
→DSP Sources
→Estimation
→                       →Adaptive Filters
→Math Functions         →                   →Anlog Filter Design
→Platform Specific I/O →Multirate filters  →
→Quantizers                                 →Digital Filter
→Signal Management                          →

→Signal Operations                          →Overlap -Add FFT filter
→Statistics                                 →Overlap -Save FFT filter
→Transforms
```

打开 Simulink 窗口，依次单击 File→New→Model，得到一个新模型窗口，然后拖动 Digital Filter Design 模块而且放入新建模型窗口。当单击新窗口中的模块对象时，在同一窗口打开如图 7.1 所示的 fdatool。当我们导入前面章节设计的数字滤波器参数或在第 7 章完成量化滤波器设计后，使用 DSP Blockset 下的 Filter Realization Wizard 得到滤波器的结构。滤波器模型，我们可以连接不

同类型信号源并从连接滤波器的示波器上观察输出。通常，我们需要设计一个整体系统，在这种情况下，数字滤波器是系统唯一的主要模块，但还有其他一些集成子系统。所以可能需要使用 DSP 模块之外的自适应滤波器或多率滤波器或通信与控制模块等。构建全数字信号处理系统模块框图后，使用 Simulink 进行不同条件下的大量仿真，以确保它符合设计要求；否则，我们还要修改滤波器设计或调整参数。例如，我们可以用浮点或定点格式的有限数据位仿真整个系统，用 Fixed Point 模块集表达所有数据。我们也可能不得不完全改变设计和仿真新系统。

8.3 设计准备

所有数字滤波器和数字系统的设计和仿真都是用基于科学理论数值计算的 MATLAB 和 Simulink 完成。当这项工作完成后，我们要做出以下选择之一：

1）设计一个大规模集成电路芯片，用硬件描述语言软件（如 VHDL），以满足特定的设计要求。

2）从芯片制造商选择一款 DSP 芯片，如德州仪器、模拟装置、朗讯、摩托罗拉而且编程使其成为一个数字系统。

3）选择一个通用微处理器，编程使其成为一个数字信号处理系统。

4）使用可编程逻辑阵列（FPGA）设计系统。

在所有情况下，几种设计应尽可能考虑完善，以便进行下一步的硬件设计。

如果我们决定选择一个上面提到的厂商的 DSP 芯片，我们必须考虑数字滤波器信号带宽或数字系统处理的信号带宽，并基于此选择 ADC 的采样频率。然而，ADC 的采样频率或许和 CPU 时钟频率或 CPU 数据传输到存储器的速度不同。这反过来决定 mips（每秒数百万的指令）比率。依据处理器的数据和存储空间数量的要求，功率大小被确定。其他注意事项是 I/O（输入/输出）接口和附加设备（如电源电路、微控制器、扩展内存和外围设备）。最后要关注的是每个芯片的成本。我们还需要考虑软件的可靠性和制造商提供的技术支持；如果数字滤波器或系统市场需求持续多年，那制造商的可信度和可持续性也很重要。

DSP 芯片的选择参考芯片主要制造商评价及详细指标说明会更方便。例如，DSP 选择指南，可从 TI（德州仪器）网站 www. dspvillage. ti. com 下载，是所有芯片信息的重要来源。

TI 提供的 DSP 芯片分为三类。TMS3206000 系列主要用于设计高性能的系统，支持 1200 ~ 5760mips 定点计算和 600 ~ 1350mflops（每秒百万浮点操作）浮

点计算。定点 DSP 是 TMS320C62x 和 TMS320C64x 系列，浮点 DSP 是 TMS320C67x 系列。定点 TMS32062x DSP 被优化用于多通道多功能应用设计，如无线基站、远程接入服务器、数字用户环路（DSL）系统、中心办公室开关、呼叫处理、语音识别、图像处理、生物识别设备、工业扫描仪、精密仪器和多路电话系统。它们使用单精度格式与双精度格式的 16 位乘法和 32 位指令。定点 TMS320C64x 拥有最高性能，时钟频率达到 720MHz 和 5760mips，而且它们最适合应用在数字通信和视频及图像处理、无线局域网、网络摄像头、基站收发器、DSL、混合调制解调器等中。浮点 TMS320C67x 运算频率达 225MHz，其应用类似。

TMS320C5000 DSP 系列用于消费类数字设备，即互联网与消费电子应用产品。因此这些芯片功耗优化低至 0.05mW/mips 和速度 ≤300MHz 与 600mips，TMS320C54x DSP 在便携设备方面是众所周知的行业领头者，如蜂窝电话（2G、2.5G 和 3G）、数字音频（MP3）播放器、数码相机、个人数字助手（PDA）、GPS 接收器和电子图书。TMS320C55x 提供最高的功率效率，并且软件可兼容 TMS320C54x DSP。

TMS320C2000 DSP 被设计用于数字工业控制，包括工业驱动、伺服控制、工厂自动化、办公设备、泵控制器、风扇、暖通空调（HVAC）和其他家用电器。TMS320C28x DSP 提供 32 位定点处理和 150mips 运算，而 TMS320C24x DSP 提供最大 40mips 运算。

更详细的 DSP 信息与说明及其他设备，如 TI 提供的 ADC 和编解码器（编码器/解码器）可以在 DSP 选择指南中查找。软件和硬件开发工具信息、应用笔记和其他资源材料等由网站免费提供，必须记住，由其他制造商如 AD 公司制造的 DSP 芯片可能更适合特定的应用，同样也提供大量的关于他们芯片的说明和应用。

8.4 代码生成

下一个任务是生成选用 DSP 的机器语言代码，用于执行设计的数字系统算法。首先我们要将系统算法转换成开发环境下 C/C + + 语言代码。这可以由具备 C 语言编程经验的人手工完成。或者我们用 Simulink 仿真整个系统的性能，然后使用其 Real - Time Workshop[7] 模块集生成对应系统的 ANSI 标准 C 代码㊀。生成

㊀ 根据计算机所安装 MATLAB/Simulink 版本不同，本章提到的一些软件（如 FDA 工具），实时工作间及其他工具可能不可用。

的 C 代码可以在 PC、DSP、微控制器实时和非实时多种环境下运行。连接一个快速原型目标如 xPC 目标到物理系统，但使用 Simulink 模型作为物理目标的接口。基于这种设置，我们测试和评估物理目标的性能。当仿真结果满意时，Real - Time Workshop 用来生成和下载可执行代码到目标系统。此时，我们可以监视目标系统的性能，如果有必要也可以调整其参数。Real - Time Workshop 使基本概念与 C 代码对应系统的整体性能变得有效，非常有用。

一个被称作 Real - Time Workshop 拓展的 Real - Time Workshop 嵌入式编码器被用于优化所嵌入离散时间系统的 C 代码。

注意，C 代码的方便性在于它独立于任何 DSP 芯片制造商。但是，制造商可能会提供自己的软件去生成特定 DSP 芯片的 C 代码，并进行优化。然而，使用机器语言编写代码对不同制造商的 DSP 芯片是不同的，而且不同制造商提供必要工具将 C 语言转换成自己 DSP 芯片的机器码。

8.5 CCS

德州仪器称它为代码集成开发环境（IDE）。主要执行步骤如图 8.2 所示。基本上这些步骤包括 C 编译器、汇编器、链接器、调试器、仿真器、模拟器功能。必须指出，其他制造商设计 DSP 芯片应用有各自不同的应用规范；他们的软件打包捆绑步骤类似于上面提到的德州仪器（TI）的编译环境（CCS）。

首先 CCS 将 C/C + + 代码编译成所选 DSP 平台的助记符形式或代数形式的汇编语言代码。如果我们选择 TMS320C55x 系列 DSP 去说明软件开发周期，则调用 C 编译器的命令格式为

```
cl55[-options] [filenames] [-z[link_options] [object_files]]
```

[filenames] 指 C 程序文件、其他汇编语言文件，目标文件，默认扩展名依次是 .c，.asm 与 .obj。C 语言在执行一些特定的操作时不是很高效，如在 DSP 中进行定点 DSP 数据处理。出于这个原因，汇编语言文件被添加到 C 语言程序文件中，在执行时间关键环节使用汇编语言，以提高程序执行效率。我们可以选择用许多选项，如 [-options] 和 [link_options] 控制编译器处理文件方式和链接器处理目标文件方式。关于更多细节，学生应参考 TI 仿真器用户指南[25]。

第二步是汇编器把汇编语言翻译成对应 DSP 平台的二进制（或机器语言）形式。CCS 调用汇编器的命令格式为

```
asm55 [input_file [object_file] [list_file] [-options]]
```

因为可能有几个 C 程序文件以小分段形式执行原始算法，所以汇编器生成

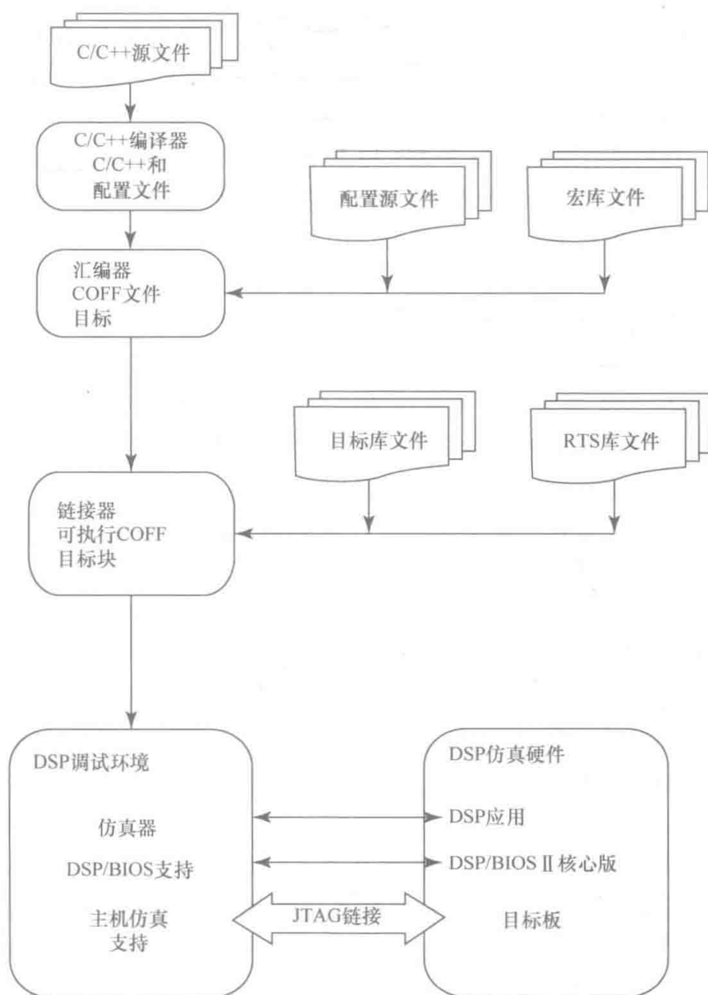


图 8.2 从 C 代码生成目标代码的软件开发流程

几个分段的输出文件。也可能从外部库收集汇编源文件，其执行过程分几个阶段反反复复后装载进入 [filenames] 列表项。例如，德州仪器使用的 3 个函数库提供了大量的高优化功能函数，这 3 个函数库命名为 DSP 库（DSPLib）、图像处理库（IMAGELib）、芯片支持库（CSLib）。当汇编程序很长时需要缩短成一个宏，这样可以用单条或几行指令调用。所有这些外部文件被添加到汇编语言文件列表并转换为二进制形式，一种称为 Common - Object File Fomat（COFF）。object_file 以 COFF 格式生成对象文件；list_file 显示二进制对象代码及汇编源代码和程序变量分配的内存空间位置。但它们分配在临时位置，而不是在绝对位置。因此这些可重分配的对象文件可以归档到可重用的文件库，可以被使用在任何地方。汇编程序有许多可选项，具体使用描述详见 Ref. 25。

链接器被用来将所有汇编器生成的对象文件组合成一个单链接目标代码，而这是通过一个具体的内存映射在目标 DSP 芯片物理内存分配绝对地址完成的。创建内存映射由链接器 command_ xfile 产生，它列出了汇编代码的不同分区、具体起始地址及在 RAM 和 ROM 存储空间（随机和只读存储器）中的长度、各分区位于 RAM 和 ROM 的地址及各种选项。调用链接器命令如下：

```
lnk55 command_ file.cmd
```

链接器能从外部库和对调试过程非常必要的运行实时支持（RTS）调用额外的对象文件。它还有用于控制链接器的输出的选项，这是一个可执行 COFF 目标模块，它以 . obj 为扩展名。链接器详细信息可在 Ref. 17 中找到。请记住，其他 DSP 平台的编译器、汇编和链接器命令可能会有所不同，关于这些命令信息可以在选择的 DSP 平台开发说明中找到合适的参考信息。

8.6 仿真器与模拟器

当我们生成可执行 COFF 模块后，我们必须通过软件仿真和硬件平台模拟进行测试和调试。为实现仿真低成本，我们使用开发启动器工具，例如，TMS320C54x DSP 的 TMS3205402 DSP starter kit，为更具体的评估和调试，我们使用一个 TMS320C5409 评估板。最后，我们借助模拟器板，如 XDS510 JTAG 仿真器，进行目标代码的实时条件运行。

可执行目标代码下载到 DSK 板的 DSP 上。仿真程序安装在个人计算机上，个人计算机连接接到 DSK 板，DSK 板接受目标代码输入，在用户控制下，它执行目标代码就仿真 DSP 设备上运行的相同的运算操作。用户可以一次执行一行目标代码，通过在目标程序特殊行插入断点，暂停程序执行；查看数据存储器、程序存储器、辅助寄存器、堆栈等内容；显示寄存器内容，例如，一个滤波器操作的输入和输出；而且可改变所要求的寄存器的内容。你也可以观察或监视控制 I/O 硬件的寄存器、串行端口和其他组件。如果需要微小改变，CCS 重新快速汇编链接代码文件加速调试过程，否则整个程序必须重新汇编和链接，然后才能进行调试。当在所有断点监控和修正错误结束后，程序执行手动恢复。通过插入探测点，CCS 能使我们从文件读取数据或写文件到 PC 上，分段停止程序执行，然后恢复。很明显 DSK 仿真是一个缓慢的过程，不检查连接到数字系统外围设备的性能。

为测试目标代码在 DSP 上实时运行性能，我们通过并行打印电缆将模拟器板连接到 PC，而 XDS 510 模拟器符合 JTAG 接口标准。外围设备也连接到模拟器板。CCS 中包含一个 DSP/BIOS Ⅱ插件运行软件模拟。它还包含 RTDX（实时

数据交换）模块，允许目标DSP与主机间实时数据交换。CCS能使我们在实时条件下以全采样率测试和调试软件性能。不用中断软件运行，模拟器控制其断点执行，单步执行，而且监控内存和寄存器，并检查包括外围设备在内的整个系统性能。当发现整个系统模拟运行正确后，软件可批准生产进入市场。

用MATLAB和Simulink完成了数字系统设计，这是一个非常简短的硬件设计过程概述。为精通所有软件工具使用，建议学生们参考大量TI和其他制造商相关文献，例如，模拟器件公司提供了一个称为Visual DSP + +的开发软件，其中包括一个C + +编译器、汇编器、链接器、用户界面和ADSP - 21xx DSP芯片调试工具。

8.6.1　Real - Time Workshop 嵌入目标

Simulink已扩展到产生和仿真数受限、比特运行时间精确的代码，直接用于设计DSP和FPGA系统级程序。这个软件工具大大减少了上述设计工作，因为它方便了数字滤波器和系统设计，包括使用数字信号处理工具箱和FDA工具及为硬件设计生成可执行机器码。

8.7　小结

上面的资料只是一个非常简短的设计过程概括——这其中必须从C代码生成汇编语言代码，使用汇编器生成目标代码，链接不同部分目标代码得到机器语言的可执行目标代码。然后使用评估板、仿真器及模拟器调试代码；所有这些步骤都是通过使用一个集成的、无缝的CCS软件去说明步骤。同任何设计过程类似，这是一个迭代过程，可能需要我们回到前面的步骤改进或优化设计，直到我们完全满意整个系统在实时条件下的性能。然后在软件开发完成后准备应用在具体应用所选择的DSP芯片中。

参考文献

1. S. M. Kuo and B. H. Lee, *Real-Time Digital Signal Processing; Implementations, Applications and Experiments with TMS320C55X*, Wiley, 2001.
2. S. M. Kuo and W.-S. Gan, *Digital Signal Processors: Architectures, Implementations and Applications*, Pearson Prentice-Hall, 2004.
3. R. Chassaing, *Applications Using C and the TMS320C6XDSK*, Wiley, 2002.
4. R. Chassaing and D. W. Horning, *Digital Signal Processing with the TMS320C25*, Wiley, 1990.
5. R. Chassaing, *Digital Signal Processing and Applications with the C6713 and C416 DSK*, Wiley, 2004.
6. The MathWorks, Inc., *Learning Simulink, User's Guide*, 1994.

7. The MathWorks, Inc., *Real-Time Workshop for Use with Simulink, User's Guide.*
8. P. Embree, *C Algorithms for Real-Time DSP*, Prentice-Hall, 1995.
9. The MathWorks, Inc., *Embedded Target for the TI TMS320C6000^{TM} DSP Platform, for Use with Real-Time Workshop$^{(R)}$, User's Guide.*
10. Texas Instruments, *TMS320C6411 Fixed-Point Digital Signal Processor* (SPRS196).
11. Texas Instruments, *TMS320C6000 CPU and Instruction Set Reference Guide* (SPRU189).
12. Texas Instruments, *Manual Update Sheet for TMS 320C6000 CPU and Instruction Set Reference Guide* (SPRZ168).
13. Texas Instruments, *TMS320C64x Technical Overview* (SPRU395).
14. Texas Instruments, *Code Composer Studio Tutorial* (SPRU301).
15. Texas Instruments, *Code Composer Studio User's Guide* (SPRU328).
16. Texas Instruments, *TMS320C6000 Programmer's Guide* (SPRU198).
17. Texas Instruments, *TMS320C6000 Assembly Language Tools User's Guide* (SPRU186).
18. Texas Instruments, *TMS320C6000 Optimizing C Compiler User's Guide* (SPRU187).
19. Texas Instruments, *TMS320C6000 C Source Debugger User's Guide* (SPRU188).
20. Texas Instruments, *TMS320C6000 DSP/BIOS User's Guide* (SPRU303).
21. Texas Instruments, *TMS320C6000 DSP/BIOS Application Programming Interface* (API) *Reference Guide* (SPRU403).
22. Texas Instruments, *TMS320 DSP Algorithm Standard Rules and Guidelines* (SPRU352).
23. Texas Instruments, *TMS320 DSP Algorithm Standard Developer's Guide* (SPRU424).
24. Texas Instruments, *TMS320C6000 Simulator User's Guide* (SPRU546).
25. Texas Instruments, *TMS320C55x Optimizing C Compiler User's Guide* (SPRU281).
26. Texas Instruments, *TMS320C55x Assembly Language Tools User's Guide* (SPRU380).
27. Analog Devices, *ADSP-21xxx Family: Assembler Tools and Simulator Model*, 1995.
28. Analog Devices, *ADSP-2106x SHARC User's Manual*, 1997.
29. Motorola Inc., *Motorola DSP Assembler Reference Manual*, 1994.
30. Motorola Inc., *DSP56xxx Digital Signal Processor: User's Manual*, 1993.

第9章　MATLAB基础

9.1　简介

MATLAB是一个非常强大的知名软件包[㊀]，可用于科学和工程学科的数值计算、数据分析和图形可视化等。可在几乎所有平台，如多种操作系统下的个人计算机和工作站下运行。当你键入命令matlab时，开始一个会话，显示在监视器的第一个窗口是命令窗口，有命令提示 > >，这是等待你输入命令[㊁]。使用命令exit结束会话。

在命令窗口的交互模式下，MATLAB包含大量可用的内置函数和命令。只要在命令窗口提示下，用合适语法格式输入一个函数名或一条命令，答案就会立即显示。还有其他两种窗口，即编辑窗口和图形窗口，这将在稍后讨论。一些设计的软件包使用附加的函数集，更适用于特定的学科，如控制系统、数字信号处理、通信工程和图像处理。这里有20多种函数集，称为“工具箱”（如控制工具箱、数字信号处理工具箱、通信工具箱、图像处理工具箱）。它们都在MATLAB下运行和实现数据矩阵运算的基础功能，这就是为什么软件命名为MATLAB（矩阵实验室）。Simulink是另一种工具箱，用于仿真系统性能，系统是由不同子系统连接组成的，当有不同类型输入信号时，可以得到输出结果。

MATLAB允许用户使用其大量的内置函数、命令和操作及工具箱构造功能函数，而不必知道如何编译、链接、加载和创建可执行代码，因为MATLAB使用自己的语言执行这些步骤，对用户是不可见的。它执行步骤和给出答案的速度非常快！在大多数版本的MATLAB中，有一个“符号”工具箱，当操作以符号形式表达时，它执行诸如微分、积分、矩阵求逆及微分方程求解等。在最近版本软件中，添加了一些新工具箱，如滤波器设计工具箱、DSP模块集，是基于面向对象的程序设计。

9.1.1　向量、数组和矩阵

向量和标量是矩阵的特殊情况——MATLAB中均表示为数组。标量是一个1×1

㊀ 该软件可从MathWorks公司，网站http：//www.mathworks.com获得。

㊁ 如果您登录连接到计算机网络的工作站，则可能需要通过在启动MATLAB之前输入setenv DISPLAY网络号码或其他命令来设置正确的环境。

维数组，而一个行向量是一个 $1\times n$ 维数组，一个列向量是一个 $n\times 1$ 维数组。当你在一个方括号内输入用空格隔开的数组元素，MATLAB 显示这是一个行向量。例如，当你输入

```
>>A=[1 2 0 3 1 5]
```

它显示

```
A=1  2  0  3  1  5
```

当你输入数组，没有给数组取名，`>>[1 2 0 3 1 5]`，MATLAB 回应

```
ans=1  2  0  3  1  5
```

当您输入元素之间用分号隔开，数组元素显示一个列向量，例如

`>>B=[1  2 0; 3 1 5; 0 4  -2]`显示为 3×3 矩阵

```
B=1  2  0
  3  1  5
  0  4 -2
```

如果一个数组或命令末端加分号，则命令窗口不显示数组和命令输出结果，但命令和输出变量保存在缓冲区，称为工作空间。工作空间保存变量、数据、数组内容矩阵和其他元素，以及用户输入的命令记录。建议会话开始前改变工作目录以便存储工作空间内容。你可以回车另起行代替使用分号输入元素或者空一格再录入 3 个点继续下一行，如下所示，当数组非常长，超出屏幕显示尽头时，这样做非常有用：

```
>>C=[1 2 0
3 1 5
0 4  -2]
or
>>C=[ 1 2 0; 3 1 5;...
0 4  -2]
displays the answer
C=1 2  0
  3 1  5
  0 4 -2
```

9.1.2　矩阵运算

很明显，一个列向量通过元素输入分号或一个行向量转置得到。在 MATLAB，命令 x' 表示向量或矩阵的转置操作。因为向量和矩阵一直保存在工作空间中，如果录入 >>A′，得到

```
ans
1
2
0
3
1
5
```

```
>>D=C' 产生
```

```
D =
1  3  0
2  1  4
0  5 -2
```

如果录入 C（:），会得到矩阵 C 垂直向量的列排列向量：

```
ans =
1
3
0
2
1
4
0
5
-2
```

当一个标量、向量或矩阵乘以（或除以）一个标量 c，每个元素的标量、向量或矩阵均乘以（或除以）c，当标量 c 与矩阵相加时，它被添加到向量或矩阵的每个元素。例如，x=5；F=x*C，得到输出

```
F=5  10 0
15 5  25
0 20 -10
```

FF=x+C,得到输出

```
FF =  6 7 5
```

```
8 6 10
5 9 3
```

两个矩阵（向量）的加法和减法由 MATLAB 根据矩阵代数规则运算，但要求它们有相同的维数。向量或矩阵乘法相乘根据代数规则运算，但必须是匹配的。矩阵操作和相应的 MATLAB 概念如下：

加法	+
减法	-
乘法	*
幂或指数	^
转置	′
左除	\
右除	/

注意，命令 x = M \ b 给出方程 M * x = b 的解，这里 M 假定是一个非奇异方阵。在矩阵代数中，方程解是 $x = M^{-1}b$。左除运算被通常用于矩阵代数应用中。（右除命令 x = b/M 给出方程 x * M = b 解，假设 x 和 M 可乘，则矩阵代数的解是 $x = bM^{-1}$）。

当我们使用同样的变量但定义新值时，则它们是当前变量值，所以我们定义和使用它们作为下述操作实例：

```
>>A=[1 2 1;0 1 1;2 1 1];
>>B=[2 1 0;1 1 1;-1 2 1];
>>C=A+B
C=
3  3  1
1  2  2
1  3  2
>>D=A*B
D=
3  5  3
0  3  2
4  5  2
>>M=A;
>>b=[2;4;4];
>>x=M\b
x = 0.0000  -2.0000  6.0000
```

而矩阵的加法和减法是对矩阵逐项元素的相加与相减。我们知道矩阵乘法和除法遵循不同的规则。在所有前面运算中，MATLAB 给出了正确的答案。它还有另一种类型的运算，就是在两个矩阵运算符前加一个点。乘法（. *）、除法

(./) 和指数 (.^) 是两个相融矩阵对应元素的 3 个数组运算。

用点乘代替 D = A * B 相乘。例如，> > D = A. * B 结果是

```
D=
 2    2   0
 0    1   1
-2    2   1
```

很容易看到命令 > > A^2 = A * A 结果

```
ans =
3  5  4
2  2  2
4  6  4
```

定义一个矩阵

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

现在我们计算 U = X. ^2 和 V = 2. ^X 得到以下输出：

```
>>U=X.^2
```

$$U = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{bmatrix}$$

```
>>V=2.^X:
```

$$V = \begin{bmatrix} 2^1 & 2^2 \\ 2^3 & 2^4 \end{bmatrix}$$

一个矩阵能通过添加新矩阵、新列或行向量扩展，如下例所示：

```
>>F=[A B]
F=
1  2  1  2  1  0
0  1  1  1  1  1
2  1  1 -1  2  1
>>b=[5 4 2];
>>G=[A;B;b]
G =
 1  2  1
 0  1  1
 2  1  1
 2  1  0
 1  1  1
-1  2  1
 5  4  2
```

除法操作符 ./可用于一个标量除以每个矩阵元素，如下所示，假定矩阵没有零元素：

\> >W =12./X,结果是

$$W=\begin{bmatrix}12 & 6\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

```
> > WW = [6 2; 2 3];
```

W./WW 表示两个矩阵对应元素逐项相除：

```
ans =2   3
     2   1
```

一个矩阵 G 在（i，j）位置的元素识别通过输入 > > G(7,2)得到，得到 ans =4，也可以通过输入 > > G(7,2) =6 改变矩阵元素值，所以当前有

```
G =
1   2   1
0   1   1
2   1   1
2   1   0
1   1   1
-1  2   1
5   6   2
```

冒号：可用于提取矩阵子阵，如下面例子所示：

```
> >Q =[ 2 5 6 ; 3 2 4 ;-3 1 8]
```

\> >Q(:,2)给出所有行第二列的元素子阵：

```
ans =
    5
    2
    1
```

命令 Q（3,:）给出第三行所有列元素：

```
ans =
    -3  1   8
```

命令 Q(2:3,1:2)，给出了矩阵 1 到 2 行 2 到 3 列元素：

```
ans =
    5   6
    2   4
```

还有许多其他操作可以应用于矩阵，对于矩阵 A 运算如下：

```
矩阵运算
rot90(A)       矩阵旋转 90°
fliplr(A)      矩阵左右列反转
flipud(A)      矩阵上下行反转
triu(A)        提取矩阵上三角阵
tril(A)        提取矩阵下三角阵
```

有一些特殊的矩阵，我们将只列出 3 个非常有用的操作矩阵：

ones(m,n)，给出 m 行 n 列单位矩阵

zeros(m,n)，给出 m 行和 n 列零矩阵

eye(m)给出 $m \times m$ 单位对角阵。

一个矩阵 A 逆矩阵函数是 inv(A)，求矩阵特征值函数是 det(A)，求矩阵秩函数是 rank(A)。

因为这只是 MATLAB 基础，所以这里不包含所有的函数信息。您应该参考上面提到的软件附带的用户指南和其他关于 MATLAB 本章参考文献［1－3］。当你登录到 MATLAB 或工具箱的任何一个子目录，很快就能得到在线帮助。当你输入 help funtionname，这里 functionname 是你需要得到详细信息的函数名称，要求的信息立即显示在命令窗口中。所以没有必要记住语法和各种函数的特性等。使用 MATLAB 及工具箱的最好学习方式是尝试应用，在必要时使用帮助。

9.1.3　标量运算

如果 $t = (0.1\pi)$ rad/s，MATLAB 函数 sin(t)给出的答案是 0.3090。在时间间隔（0 2π）内计算 $v = \sin(0.1\pi t)$ 并绘图，我们必须选择连续时间变量 t 的离散值，并计算对应的 v 值。为此，创建一个数组 $t = [0.0:0.1:2.0]$；这样在 $t = 0.0 \sim 2.0$ 之间有 21 个序列值，间隔增量为 0.1。现在如果我们输入函数 $v = \sin(\pi t)$，结果是 21 个序列值。命令 stem（v）立刻在图形窗口中绘出结果图，如图 9.1 所示。

用 figure 命令创建一个新窗口，plot（t，v）将离散值连接绘图（见图 9.2）。如果我们不使用 figure 命令，第二个图将取代第一个图形窗口。命令窗口输入命令 grid，结果图将出现网格线，下一步我们使用 title、ylabel、xlabel 命令为结果图加标题，为 y 轴与 x 轴加标签。

在命令窗口输入命令后，得到如下两个图示。因为 MATLAB 为 x 轴和 y 轴刻度选择取决于它们的取值范围，我们也要为 ylabel 和 xlabel 选择文字描述量：

```
t = [0.0:0.1:2.0];
v=sin(pi*t);
stem(v);grid
title('Values of sin(pi*t)')
ylabel('Values of sin(pi*t)')
xlabel('Values of 10t')
figure
```

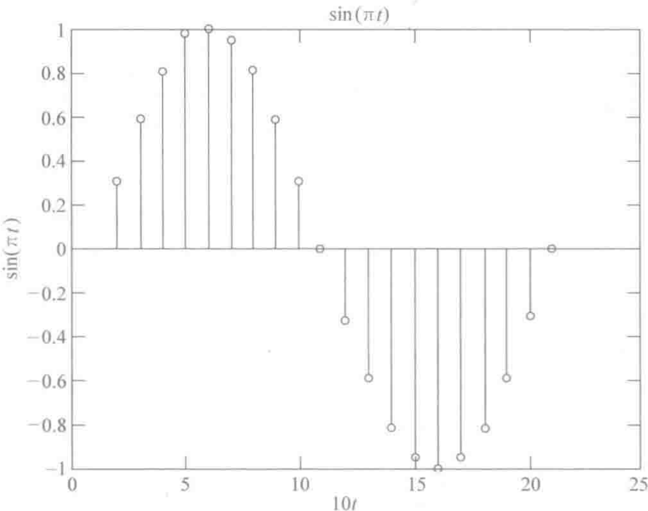


图 9.1 sin（πnT）图

```
plot(t,v);grid
title('Plot of sin(pi*t)')
ylabel('Value of sin(pi*t)')
xlabel('Value of t')
```

9.1.4 画图

命令 plot（t，v）可以添加额外的参数指定绘制曲线的颜色，例如 plot(t,v,'g')将显示绿色曲线。其他颜色对应参数如下：

y　黄色
m　品红色
c　蓝绿色
r　红色
b　蓝色
w　白色
k　黑色

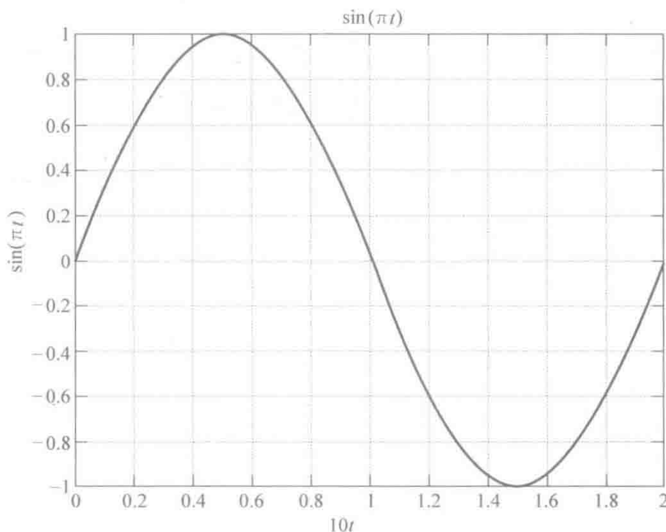


图 9.2　sin(πt)图

下一个能添加的参数是给绘制曲线加标记。例如，`plot(t,v,'g','+')`将绘制带'+'标记的曲线，代替原来默认的纯线条曲线。其他可用的标记如下：

o	圆
.	点
*	星
-	实线
:	点线
--	虚线
-.-	点画线

你可以在同一图形中画几个曲线，例如，命令 `plot(t,v,'g','-',t,y,'r','*')`绘制 v，y 对 t 的两个变量图。另一种在同一图绘多个变量图形方式是绘完第一个变量图后，使用命令 hold on 再键入命令绘制第二个变量图：

```
plot(t,v,'g');
hold on
plot(t,y,'r')
```

MATLAB 命令 `subplot grid` 与 `axis` 的使用在本书的前面已介绍。命令 `gtext` 和 `ginput` 在绘图中也很有用。在最近的信号处理工具箱版本中，有一种叫 `fvtool`（滤波器可视化工具）的工具提供另一些绘制滤波器响应的功能。你可以键入 `help gtext`，`help ginput`，或 `help fvtool` 获得更多的相关信息。

9.1.5 MATLAB 函数

除 `sin` 函数，MATLAB 其他一些可用函数如下：

三角函数

sin	正弦	cos	余弦
tan	正切	arcsin	反正弦
arccos	反余弦	arctan	反正切
arctan2	四象限反正切	sinh	双曲正弦
cosh	双曲余弦	tanh	双曲正切
arcsinh	双曲反正弦	arccosh	双曲反余弦
arctanh	双曲反正切		

数学函数

abs	绝对值或绝对幅度
angle	复数的相位角
sqrt	方均根
real	复数的实部
imag	虚部
conj	复共轭
round	四舍五入到最近整数
fix	四舍五入到零
floor	四舍五入到负无穷
ceil	四舍五入到正无穷
sign	符号函数
rem	余数
exp	以 2 为底的指数
ln	以 e 为底的对数
lg	以 10 为底的对数

9.1.6　数值格式

可以指定 MATLAB 显示数值的格式。如果数量是一个整数，那么在默认情况下，显示为一个整数。如果它是一个实数，它显示小数点右边 4 位数（如 12.0945），这是默认短格式。如果数据有许多有意义的位数，我们可以指定其他格式，用科学计数法。例如，让数为 12.094567832155321。如果我们输入 MATLAB 命令 `format long`，这个数字将会显示 16 位数为 12.09456783215532。如果我们声明 `fomat short e`，此数将显示 5 位数加指数形式表示 1.2094 e+01，而命令 `fomat long e` 格式选择 16 个数字位加一个指数形式：1.209456783215532 e+01。

记住，这些格式用于在监视器上显示命令、函数和运算结果。但如果有必要，由 MATLAB 完成执行函数和脚本的数值计算有更高精度，例如，当使用信号处理工具箱中的函数和脚本时。

9.1.7　控制流

3 个函数用于控制执行流向，它取决于判决量的状态。这种功能在其他编程语言和 MATLAB 中都有。这些函数是 `for loops`，`If - elseif - end loops` 和 `while loops`，示例如下：

语句

```
>> for n=1:10
 x(n )=n^2+4*n
end
```

产生一个向量，包含 10 个值 $x(n)=n^2+4n, n=1,2,3,\cdots,10$。

可以定义一个数组，如 `n=3:-0.5:-1.0`，数值增量是 -0.5，结果是一个数组 `n=[3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0.0 -0.5 -1.0]`。数值增量默认值是 1。

定义一个二维数组，函数 `H(i,j)=0.1 ^ i+0.2 ^ j`，使用语句

```
for i =1:20;
  for j =1:20;
      X(i,j) = 0.1^i+0.2^j
  end
end
```

使用 `if` 语句的例子

```
>>n=-10:10
if n<0
     x(n)=0;
```

```
elseif 0≤n≤5;
    x(n)=(0.8).^n;
else
    x(n)=0
end
```

注意，如果使用语句 x(n) = (0.8)^ n，指数前缺少点‘.’，将显示一条错误消息。

while 循环只要条件关系成立则一步一步执行。例子如下：

```
>>n=1
while n<8
x(n)=0.5^n;
n=n+1
end
```

n 取 7 达到最大值时，$x(n)$ 值运算结束，end 语句后输入 x 得到结果

0.5000 0.2500 0.1250 0.0625 0.0313 0.0156 0.0078

但这个问题更容易解决，可用以下两个语句来获得相同的值 $x(n)$，$n=1$，2，3，…，7，但我们必须在指数（^）前插入一个点，因为 n 是七元素行向量。当使用点运算操作——特别是得到一个矩阵维数错误信息时，使用 S = size（A）非常有助于找到矩阵维数：S = size(A)。

```
> >n =1:7;
x(n) = (0.5).^n
```

9.1.8 编辑窗口和 M - file

到目前为止，我们已经介绍了一些 MATLAB 命令窗口和图形窗口常见的函数和操作。在命令窗口中，我们在一个交互模式时，每个命令录入后立即执行显示结果。如果我们希望改变前面的语句或输入数据中的任何一个，我们必须使用↑键一行一次跟踪回来和编辑，然后使用↓键回到程序停止处。如果当前行前的那条语句有很多行，或想让程序变化很多，或者如果希望找到程序不同输入参数的输出值，这不是一个方便的过程。所以通过单击 File - Open - New - M - file 创建一个程序或脚本和使用内置 MATLAB 的一个文本编辑器，或任何其他文本编辑器并将其保存在当前目录和一个扩展名为 . m 的文件。可以使用 MATLAB 函数和运算符编写这个脚本，甚至可以使用其他函数或我们编写过的函数。这样一个文件叫作 M - file，保存后，单击命令窗口并键入不需要扩展名的 M - file 名称。如果没有错误，整个脚本程序执行并显示结果。如果有任何错误消息，我们回到编辑窗口改正 M - file 后，保存，回到命令窗口，然后录入 M - file 名再次运行

它。要么我们在 M - file 中输入变量值或添加以下命令：

```
input('Type in the input parameters for xyz')
```

脚本执行时，程序显示语句 Type in the input parameters for xyz，并等待从键盘输入。我们可能会要求输入几个参数，当从键盘输入所有的数据参数后，程序执行。当我们想发现不同输入参数值程序响应（输出）时，这是有用的。

同样，当添加语句

```
disp('Values of the parameter xx')
disp(xx)
```

程序显示脚本被执行后的参数值，这可能在程序直接输出结果中不显示。

当任何语句之前加% 字符时，该语句不被程序执行；这仅用于对程序做信息和说明注释。在一些程序前加一些% 字符行描述文件名及说明是种很好的练习。

例 9.1

在命令窗口，从菜单条单击 File、Open、New，然后选择 M - file，就出现一个编辑窗口。现在我们给一个从文本窗编辑 M - file 的例子：

```
>>clear  %clears all the variables in the Workspace
%This program we call Ration.m computes the value of a
%  rational function f(x) with a numerator 2x+0.5 and a
%  denominator x^2+0.1x+0.05 and plots it over the interval
%  0 ≤ x ≤ 1.0.
>>x=0.0:0.01:1.0;
>>num=2*x+0.5;
>>den=x.^2+0.1*x+0.05;     %Note the dot in the first term on
                           % the right side expression
>>val=num./den;
>>plot(x,val);grid
title('Plot of the function f(x)')
ylabel('Value of f(x)')
xlabel('Value of x')
```

这个文件用 Ration. m 文件名保存在当前驱动器，然后回到命令窗口，键入 > >Ration。Ration. m 文件的所有语句立即被执行，并绘图在图形窗口（见图 9. 3）。如果有任何错误消息，在编辑窗口中启动文件，必要时再编辑和校正语句。这个是一个简单例子，但本书前面章节已讨论了很多交互模式下 M - file 程序实例。

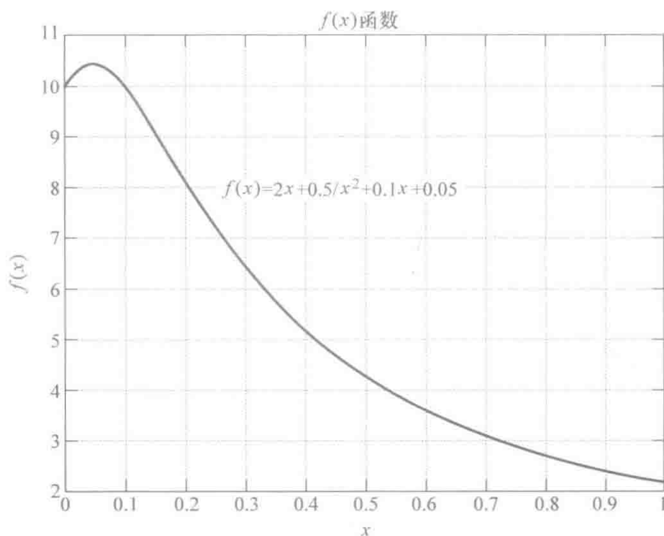


图 9.3　$(2x+0.5)/(x^2+0.1x+0.05)$的图形

9.2　信号处理工具箱

信号处理工具箱收集了大约 160 个函数，被广泛用于离散时间系统分析、设计与实现，和数字信号处理中的建模、检测、滤波、预测及谱分析等。它们在 MATLAB 下运行大约有 330 种函数与运算。在命令窗口输入 help function，这里 function 是这些函数名，将显示关于它们的详细信息。通过输入 help signal，得到一个信号处理所有函数目录列表，当然这需要已经安装 MATLAB 目录的子目录。如果知道进行数值处理的函数名但不知道其语法和其他细节，可以输入 help function。但是当我们必须进行数值处理但又不知道 MATLAB 函数名时，我们或许要浏览所有 MATLAB 函数列表并选择合适函数。所有 MATLAB 信号处理工具箱中的函数列表在 9.2.1 节给出，应该鼓励学生多使用帮助尽可能熟悉更多函数。在需要编写和编辑脚本调用相应函数时，这将大大提高工作效率。注意，我们也可以使用 MATLAB 下所有其他工具箱及 Simulink 函数，这使得软件非常强大而灵活。

9.2.1　信号处理工具箱函数列表

```
>>help signal
  Signal Processing Toolbox
  Version 6.0 (R13) 20-Jun-2002
```

```
Filter analysis.

abs - Magnitude.
angle - Phase angle.
filternorm - Compute the 2-norm or inf-norm of a digital
  filter.
freqs - Laplace transform frequency response.
freqspace - Frequency spacing for frequency response.
freqz - Z-transform frequency response.
fvtool - Filter Visualization Tool.
grpdelay - Group delay.
impz - Discrete impulse response.
phasez - Digital filter phase response.
phasedelay - Phase delay of a digital filter.
unwrap - Unwrap phase.
zerophase - Zero-phase response of a real filter.
zplane - Discrete pole-zero plot.

Filter implementation.

conv - Convolution.
conv2 - 2-D convolution.
convmtx - Convolution matrix.
deconv - Deconvolution.
fftfilt - Overlap-add filter implementation.
filter - Filter implementation.
filter2 - Two-dimensional digital filtering.
filtfilt - Zero-phase version of filter.
filtic - Determine filter initial conditions.
latcfilt - Lattice filter implementation.
medfilt1 - 1-Dimensional median filtering.
sgolayfilt - Savitzky-Golay filter implementation.
sosfilt - Second-order sections (biquad) filter
  implementation.
upfirdn - Up sample, FIR filter, down sample.

Discrete-time filter object.

dfilt - Construct a discrete-time, filter object.
(Type ''doc dfilt'' for more information)
```

```
FIR filter design.

cremez - Complex and nonlinear phase equiripple FIR filter
  design.
fir1 - Window based FIR filter design - low, high, band,
  stop, multi.
fir2 - FIR arbitrary shape filter design using the frequenc
  sampling method.
fircls - Constrained Least Squares filter design - arbitrar
  response.
fircls1 - Constrained Least Squares FIR filter design - low
  and highpass.
firgauss - FIR Gaussian digital filter design.
firls - Optimal least-squares FIR filter design.
firrcos - Raised cosine FIR filter design.
intfilt - Interpolation FIR filter design.
kaiserord - Kaiser window design based filter order
  estimation.
remez - Optimal Chebyshev-norm FIR filter design.
remezord - Remez design based filter order estimation.
sgolay - Savitzky-Golay FIR smoothing filter design.

IIR digital filter design.

butter - Butterworth filter design.
cheby1 - Chebyshev Type I filter design (passband ripple).
cheby2 - Chebyshev Type II filter design (stopband ripple).
ellip - Elliptic filter design.
maxflat - Generalized Butterworth lowpass filter design.
yulewalk - Yule-Walker filter design.
IIR filter order estimation.
buttord - Butterworth filter order estimation.
cheb1ord - Chebyshev Type I filter order estimation.
cheb2ord - Chebyshev Type II filter order estimation.
ellipord - Elliptic filter order estimation.

Analog lowpass filter prototypes.

besselap - Bessel filter prototype.
buttap - Butterworth filter prototype.
cheb1ap - Chebyshev Type I filter prototype (passband
  ripple).
cheb2ap - Chebyshev Type II filter prototype (stopband
  ripple).
```

```
ellipap - Elliptic filter prototype.
Analog filter design.
besself - Bessel analog filter design.
butter - Butterworth filter design.
cheby1 - Chebyshev Type I filter design.
cheby2 - Chebyshev Type II filter design.
ellip - Elliptic filter design.

Analog filter transformation.

lp2bp - Lowpass to bandpass analog filter transformation.
lp2bs - Lowpass to bandstop analog filter transformation
lp2hp - Lowpass to highpass analog filter transformation.
lp2lp - Lowpass to lowpass analog filter transformation.

Filter discretization.

bilinear - Bilinear transformation with optional
  prewarping.
impinvar - Impulse invariance analog to digital conversion.

Linear system transformations.

latc2tf - Lattice or lattice ladder to transfer function
  conversion.
polystab - Polynomial stabilization.
polyscale - Scale roots of polynomial.
residuez - Z-transform partial fraction expansion.
sos2ss - Second-order sections to state-space conversion.
sos2tf - Second-order sections to transfer function
  conversion.
sos2zp - Second-order sections to zero-pole conversion.
ss2sos - State-space to second-order sections conversion.
ss2tf - State-space to transfer function conversion.
ss2zp - State-space to zero-pole conversion.
tf2latc - Transfer function to lattice or lattice ladder
  conversion.
tf2sos - Transfer Function to second-order sections
  conversion.
tf2ss - Transfer function to state-space conversion.
tf2zpk - Discrete-time transfer function to zero-pole
  conversion.
zp2sos - Zero-pole to second-order sections conversion.
zp2ss - Zero-pole to state-space conversion.
zp2tf - Zero-pole to transfer function conversion.
```

```
Windows.

bartlett - Bartlett window.
barthannwin - Modified Bartlett-Hanning window.
blackman - Blackman window.
blackmanharris - Minimum 4-term Blackman-Harris window.
bohmanwin - Bohman window.
chebwin - Chebyshev window.
flattopwin - Flat Top window.
gausswin - Gaussian window.
hamming - Hamming window.
hann - Hann window.
kaiser - Kaiser window.
nuttallwin - Nuttall defined minimum 4-term Blackman-Harris
  window.
parzenwin - Parzen (de la Valle-Poussin) window.
rectwin - Rectangular window.
triang - Triangular window.
tukeywin - Tukey window.
wvtool - Window Visualization Tool.
window - Window function gateway.

Window object.

sigwin - Construct a window object.
(Type ''doc sigwin'' for more information)

Transforms.

bitrevorder - Permute input into bit-reversed order.
czt - Chirp-z transform.
dct - Discrete cosine transform.
dftmtx - Discrete Fourier transform matrix.
digitrevorder - Permute input into digit-reversed order.
fft - Fast Fourier transform.
fft2 - 2-D fast Fourier transform.
fftshift - Swap vector halves.
goertzel - Second-order Goertzel algorithm.
hilbert - Discrete-time analytic signal via Hilbert
  transform.
idct - Inverse discrete cosine transform.
ifft - Inverse fast Fourier transform.
ifft2 - Inverse 2-D fast Fourier transform.
```

```
Cepstral analysis.

cceps - Complex cepstrum.
icceps - Inverse Complex cepstrum.
rceps - Real cepstrum and minimum phase reconstruction.

Statistical signal processing and spectral analysis.

cohere - Coherence function estimate.
corrcoef - Correlation coefficients.
corrmtx - Autocorrelation matrix.
cov - Covariance matrix.
csd - Cross Spectral Density.
pburg - Power Spectral Density estimate via Burg's method.
pcov - Power Spectral Density estimate via the Covariance
  method.
peig - Power Spectral Density estimate via the Eigenvector
  method.
periodogram - Power Spectral Density estimate via the
  periodogram method.
pmcov - Power Spectral Density estimate via the Modified
  Covariance method.
pmtm - Power Spectral Density estimate via the Thomson
  multitaper method.
pmusic - Power Spectral Density estimate via the MUSIC
  method.
psdplot - Plot Power Spectral Density data.
pwelch - Power Spectral Density estimate via Welch's
  method.
pyulear - Power Spectral Density estimate via the
  Yule-Walker AR Method.
rooteig - Sinusoid frequency and power estimation via the
  eigenvector algorithm.
rootmusic - Sinusoid frequency and power estimation via
  the MUSIC algorithm.
tfe - Transfer function estimate.
xcorr - Cross-correlation function.
xcorr2 - 2-D cross-correlation.
xcov - Covariance function.

Parametric modeling.

arburg - AR parametric modeling via Burg's method.
arcov - AR parametric modeling via covariance
  method.
```

```
armcov - AR parametric modeling via modified covariance
  method.
aryule - AR parametric modeling via the Yule-Walker method.
ident - See the System Identification Toolbox.
invfreqs - Analog filter fit to frequency response.
invfreqz - Discrete filter fit to frequency response.
prony - Prony's discrete filter fit to time response.
stmcb - Steiglitz-McBride iteration for ARMA modeling.

Linear Prediction.

ac2rc - Autocorrelation sequence to reflection coefficients
  conversion.
ac2poly - Autocorrelation sequence to prediction polynomial
  conversion.
is2rc - Inverse sine parameters to reflection coefficients
  conversion.
lar2rc - Log area ratios to reflection coefficients
  conversion.
levinson - Levinson-Durbin recursion.
lpc - Linear Predictive Coefficients using autocorrelation
  method.
lsf2poly - Line spectral frequencies to prediction
  polynomial conversion.
poly2ac - Prediction polynomial to autocorrelation sequence
  conversion.
poly2lsf - Prediction polynomial to line spectral
  frequencies conversion.
poly2rc - Prediction polynomial to reflection coefficients
  conversion.
rc2ac - Reflection coefficients to autocorrelation sequence
  conversion.
rc2is - Reflection coefficients to inverse sine parameters
  conversion.
rc2lar - Reflection coefficients to log area ratios
  conversion.
rc2poly - Reflection coefficients to prediction polynomial
  conversion.
rlevinson - Reverse Levinson-Durbin recursion.
schurrc - Schur algorithm.

Multirate signal processing.

decimate - Resample data at a lower sample rate.
downsample - Downsample input signal.
```

```
interp - Resample data at a higher sample rate.
interp1 - General 1-D interpolation. (MATLAB Toolbox)
resample - Resample sequence with new sampling rate.
spline - Cubic spline interpolation.
upfirdn - Up sample, FIR filter, down sample.
upsample - Upsample input signal.

Waveform generation.

chirp - Swept-frequency cosine generator.
diric - Dirichlet (periodic sinc) function.
gauspuls - Gaussian RF pulse generator.
gmonopuls - Gaussian monopulse generator.
pulstran - Pulse train generator.
rectpuls - Sampled aperiodic rectangle generator.
sawtooth - Sawtooth function.
sinc - Sinc or sin(pi*x)/(pi*x) function
square - Square wave function.
tripuls - Sampled aperiodic triangle generator.
vco - Voltage controlled oscillator.

Specialized operations.

buffer - Buffer a signal vector into a matrix of data
  frames.
cell2sos - Convert cell array to second-order-section
  matrix.
cplxpair - Order vector into complex conjugate
  pairs.
demod - Demodulation for communications simulation.
dpss - Discrete prolate spheroidal sequences
  (Slepian sequences).
dpssclear - Remove discrete prolate spheroidal
  sequences from database.
dpssdir - Discrete prolate spheroidal sequence
  database directory.
dpssload - Load discrete prolate spheroidal sequences
  from database.
dpsssave - Save discrete prolate spheroidal sequences
  in database.
eqtflength - Equalize the length of a discrete-time
  transfer function.
modulate - Modulation for communications simulation.
seqperiod - Find minimum-length repeating sequence in a
  vector.
```

```
sos2cell - Convert second-order-section matrix to cell
  array.
specgram - Spectrogram, for speech signals.
stem - Plot discrete data sequence.
strips - Strip plot.
udecode - Uniform decoding of the input.
uencode - Uniform quantization and encoding of the input
  into N-bits.

Graphical User Interfaces

fdatool - Filter Design and Analysis Tool.
fvtool - Filter Visualization Tool.
sptool - Signal Processing Tool.
wintool - Window Design and Analysis Tool.
wvtool - Window Visualization Tool.
```

参见 SIGDEMOS、AUDIO，而且在滤波器设计工具箱，FILTERDESIGN。

如果我们录入 help functionname，我们得到函数的语法和使用信息等，但如果我们录入 type functionname，也可得到函数程序清单。下面是一个例子，可以修改任何函数，用不同文件名称保存并运行：

```
>> type kaiser
function w = kaiser(n_est,beta)
%KAISER Kaiser window.
% W = KAISER(N,BETA) returns the BETA-valued N-point Kaiser
%   window.
%
% See also BARTLETT, BARTHANNWIN, BLACKMAN, BLACKMANHARRIS,
%   BOHMANWIN,
% CHEBWIN, GAUSSWIN, HAMMING, HANN, NUTTALLWIN, RECTWIN,
%   TRIANG,
% TUKEYWIN, WINDOW.
% Author(s): L. Shure, 3-4-87
% Copyright 1988-2002 The MathWorks, Inc.
% $Revision: 1.15 $ $Date: 2002/03/28 17:28:33 $
error(nargchk(2,2,nargin));
[nn,w,trivialwin] = check_order(n_est);
if trivialwin, return, end;
nw = round(nn);
bes = abs(besseli(0,beta));
odd = rem(nw,2);
exind = (nw-1)^2;
n = fix((nw+1)/2);
xi = (0:n-1) + .5*(1-odd);
```

```
xi = 4*xi.^2;
w = besseli(0,beta*sqrt(1-xi/xind))/bes;
w = abs([w(n:-1:odd+1) w])';
% [EOF] kaiser.m
```

参考文献

1. D. Hanselman and B. Littlefield, Mastering MATLAB 5, Prentice Hall, 1996.
2. The MathWorks, Inc., *MATLAB User's Guide*, 1993.
3. D. M. Etter and D. C. Kuncicky, *Introduction to MATLAB 6,* Prentice-Hall, 2002.
4. W. J. Palm III, *Introduction to MATLAB 6 for Engineers*, McGraw-Hill, 2001.
5. J. N. Little and L. Shure, *Signal Processing Toolbox for Use with MATLAB, User's Guide*, The MathWorks, Inc., 1994.
6. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing Laboratory Using MATLAB*$^{(R)}$, McGraw-Hill, 1999.

国际视野　科技前沿

国际信息工程先进技术译丛

《数字信号处理与滤波器设计》
《信号处理系统的FPGA实现》
《多处理器片上系统的硬件设计与工具集成》
《植入式电子医疗器械》
《云计算体系架构中的智能SOA平台》
《纳米CMOS集成电路中的小延迟缺陷检测》
《绿色通信与网络》
《自主式传感器系统的能量收集——设计、分析以及实践应用》
《基于视觉的自主机器人导航》
《无线神经接口的超低功耗集成电路设计》
《基于片上去耦电容的配电网络》（原书第2版）
《智能摄像机》
《车载系统和安全的数字信号处理》
《嵌入式系统设计 —— 嵌入式信息物理系统基础》（原书第2版）
《纳米封装 —— 纳米技术与电子封装》
《内容分发网络》
《全面的功能验证：完整的工业流程》
《无线Mesh网络架构与协议》
《UMTS蜂窝系统的QoS与QoE管理》
《半导体制造与过程控制基础》
《WCDWA原理与开发设计》
《下一代移动系统：3G/B3G》
《IMS:IP多媒体概念和服务》（原书第2版）
《下一代无线系统与网络》
《深入浅出UMTS无线网络建模、规划与自动优化：理论与实践》
《HSDPA/HSUPA技术与系统设计——第三代移动
《通信系统宽带无线接入》
《无线传感器及元器件：网络、设计与应用》
《印制电路板——设计、制造、装配与测试》
《IPTV与网络视频：拓展广播电视的应用范围》
《多电压CMOS电路设计》
《微电子技术原理、设计与应用》
《蜂窝网络高级规划与优化2G/2.5G/3G/…向4G的演进》
《基于蜂窝系统的IMS——融合电信领域的VoIP演进》
《无线网络中的合作原理与应用》
《电生理学方法与仪器入门》
《移动电视：DVB-H、DMB、3G系统和富媒体应用》
《环境网络：支持下一代无线业务的多域协同网络》
《基于射频工程的UMTS空中接口设计与网络运行》
《未来UMTS的体系结构与业务平台：全IP的3G CDMA网络》



WILEY



机械工业出版社微信公众号



E视界
传播电类内容　提升专业知识



科技电眼
关注电类行业动向 聚焦前沿科技

上架指导　工业技术／信号处理



ISBN 978-7-111-58904-4

定价：139.00元